MODUL MATA KULIAH

KALKULUS

Institut Teknologi dan Bisnis
Widya Gama Lumajang

VERSI 1.0

Penyusun
Jesi Irwanto, S.Pd., M.Si

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

PERTEMUAN	TOPIK	CAPAIAN PEMBELAJARAN
1	Sistem bilangan riel, pertidaksamaan dan Nilai mutlak	1. Mahasiswa dapat mengikuti perkuliahan sesuai kontrak perkuliahan 2. Mahasiswa mampu menerapkan nilai-nilai kebudiluhuran dalam pelaksanaan perkuliahan 3. Mahasiswa memahami dan dapat menjelaskan tentang: Sistem bilangan, pertidaksamaan, variabel variabel fungsi, harga mutlak
2	• Sistem Koordinat Cartesius dan Sistem Koordinat Kutub (Polar) • Hubungan Antara Sistem Koordinat Cartesius dan Sistem Koordinat Kutub • Jarak Dua Titik Koordinat Kutub	Mahasiswa dapat menjelaskan konsep sistem koordinat kartesian dan sistem koordinat kutub/polar.
3	• Fungsi dari sebuah variabel • Fungsi Aljabar dan Grafik dari Suatu Fungsi • Fungsi Linier (Fungsi Garis Lurus) • Fungsi Kuadrat • Operasi pada Fungsi • Fungsi Trigonometri	Mahasiswa dapat memahami dan mengerti tentang variabel dan fungsi dalam memecahkan persoalan matematika
4	• Teorema limit • Limit kiri dan limit kanan • Limit Fungsi Khusus	Mahasiswa memahami pengertian dan prinsip dasar limit serta cara menyelesaikan limit fungsi
5	• Metode Penyelesaian Limit • Kontinuitas dan Diskontinuitas Fungsi • Aturan L'Hopital	Mahasiswa memahami pengertian dan prinsip dasar Limit dan Kontinuitas

6	• Menentukan Turunan Fungsi • Aturan Dasar Turunan : (Fungsi Trigonometri, Fungsi Logaritma, Fungsi Eksponen dan Fungsi Siklometri)	Mahasiswa mampu memahami prinsip dasar dan aturan dasar turunan
7	• Aturan Rantai untuk Fungsi Bersusun • Turunan dari Fungsi-fungsi Invers • Turunan Fungsi Implisit	Mahasiswa memahami prinsip dasar turunan dan penggunaannya
8	Ujian Tengah Semester (UTS)	Mahasiswa mampu menjawab dan menyelesaikan permasalahan yang diberikan dalam soal
9	• Turunan tingkat tinggi • Turunan Parsial dan Turunan Parsial tingkat tinggi	Mahasiswa memahami prinsip turunan dan penggunaannya
10	Aplikasi turunan : (Garis Singgung dan Normal, Nilai maksimum dan minimum, dalam Bidang Ekonomi : Biaya Marginal, Keuntungan/ kerugian dan Pulang Pokok, menentukan Kecepatan dan Percepatan	Mahasiswa memahami konsep dasar turunan dan penggunaannya
11	• Rumus-rumus Dasar Integral dasar • Integral Fungsi Aljabar • Integral Fungsi Eksponensial • Integral Fungsi Trigonometri • Integral Fungsi Invers Trigonometri	Mahasiswa memahami dan mampu mengaplikasikan rumus-rumus dasar integral

12	Integral Parsial dan Integral Tertentu	Mahasiswa memahami dan mampu mengaplikasikan rumus-rumus dasar integral
13	• Metode menyelesaikan soal integral dengan metode subsitusi • Integral dari Fungsi Pecah Rasional	Mahasiswa memahami dan mampu menyelesaikan persoalan integral dengan metode subsitusi dan mampu mampu menyelesaikan integral Fungsi Rasional
14	• Menetukan Luas daerah bidang datar dengan integral • Menentukan volume benda putar	Mahasiswa memahami konsep dasar integral dan mampu menentukan luas daerah bidang dengan metode integrasi
15	• Integral tak tentu dan Integral tak wajar • Aturan l'Hopital untuk Bentuk 0/0 • Pemakaian Integral tak tentu	Mahasiswa memahami dan mampu menyelesaikan Integral tak tentu dan Integral tak wajar
16	Ujian Akhir Semester (UAS)	Mahasiswa mampu menjawab dan menyelesaikan permasalahan yang diberikan dalam soal

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 1
SISTEM BILANGAN RIEL, PERTIDAKSAMAAN DAN HARGA MUTLAK

Capaian Pembelajaran	:	1. Mahasiswa dapat mengikuti perkuliahan sesuai kontrak perkuliahan 2. Mahasiswa mampu menerapkan nilai-nilai kebudiluhuran dalam pelaksanaan perkuliahan 3. Mahasiswa memahami dan dapat menjelaskan tentang: Sistem bilangan, pertidaksamaan, variabel variabel fungsi, harga mutlak
Sub Pokok Bahasan	:	1.1. Penjelasan kontrak perkuliahan 1.2. Nilai-nilai kebudiluhuran dan aplikasinya dalam perkuliahan 1.3. Sistem bilangan riel, pertidaksamaan, harga mutlak

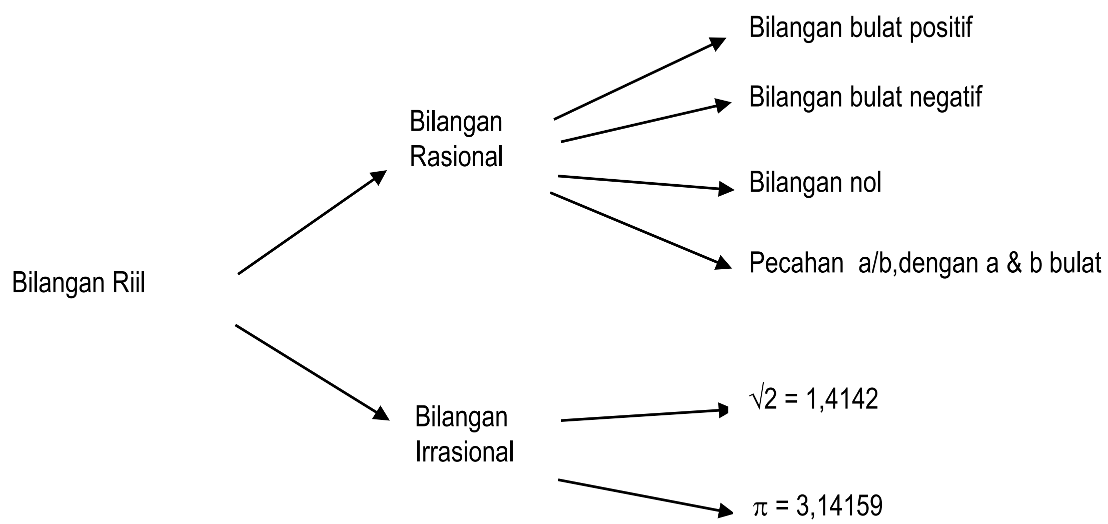
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Mata kuliah Kalkulus merupakan dasar cabang ilmu matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret tak terhingga. Kalkulus adalah ilmu yang mempelajari perubahan, sebagaimana geometri yang mempelajari bentuk dan aljabar yang mempelajari operasi dan penerapannya untuk memecahkan persamaan. Kalkulus memiliki aplikasi yang luas dalam bidang-bidang sains, ekonomi, dan teknik; serta dapat memecahkan berbagai masalah yang tidak dapat dipecahkan dengan aljabar elementer.

Kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Pelajaran kalkulus adalah pintu gerbang menuju pelajaran matematika lainnya yang lebih tinggi, yang khusus mempelajari fungsi dan limit, yang secara umum dinamakan analisis matematika. Kalkulus digunakan hampir di setiap cabang sains fisik, sains komputer, statistik, teknik, ekonomi, bisnis, kedokteran, kependudukan dan di bidang-bidang lainnya.

1.1. Sistem Bilangan

Matematika merupakan ilmu yang paling banyak dimanfaatkan dalam kehidupan ini. Di dalam kehidupan sehari-hari dari mulai dari hal yang paling sederhana sampai hal yang paling kompleks semuanya menggunakan ilmu matematika.



Gambar 1.1. Sistem Bilangan Riel

Kalkulus didasarkan pada sistem bilangan riel dan sifat-sifatnya. Kumpulan bilangan riel terdiri atas bilangan rasional dan bilangan irrasional. Bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat positif, bilangan nol dan bilangan pecahan *a/b* dengan *a* dan *b* bulat. Jika *a* merupakan anggota himpunan *S*, maka dituliskan $a \in S$ dan dibaca "*a elemen S*". Jika *a* bukan anggota himpunan *S*, maka dituliskan $a \notin S$ dan dibaca "*a bukan elemen S*".

Pada umumnya, sembarang himpunan dapat dinyatakan dengan 2 cara. Pertama, dengan mendaftar seluruh anggotanya. Sebagai contoh, himpunan *A* yang terdiri atas unsur-unsur 1,2,3,4,5,6,7,8,9 dapat dinyatakan sebagai: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Cara yang kedua, yaitu dengan menuliskan syarat keanggotaan yang dimiliki oleh seluruh anggota suatu himpunan tetapi tidak dimiliki oleh unsur-unsur yang bukan anggota himpunan tersebut. Apabila himpunan *A* di atas dinyatakan dengan cara ini, maka dapat ditulis:

$$A = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif kurang dari } 10\}$$

Himpunan *A* disebut *himpunan bagian* himpunan *B*, ditulis $A \subset B$, jika setiap anggota *A* merupakan anggota *B*. Kiranya tidaklah sulit untuk dipahami bahwa $\phi \subset A$ untuk sebarang himpunan *A*.

Dalam kehidupan nyata seringkali dijumpai bilangan-bilangan yang tidak rasional. Bilangan yang tidak rasional disebut *bilangan irasional*. Contoh-contoh bilangan irasional antara lain adalah $\sqrt{2}$ dan π.

1.1.1. Operasi-operasi Bilangan Real

Jika a, b, c merupakan anggota dari himpunan bilangan real R, maka :

1. a + b dan ab adalah elemen dari R — Hukum ketertutupan
2. a + b = b + a — Hukum komutatif penjumlahan
3. a + (b + c) = (a + b) + c — Hukum asosiatif penjumlahan
4. ab = ba — Hukum komutatif perkalian
5. a(bc) = (ab)c — Hukum asosiatif perkalian
6. a(b + c) = ab + ac — Hukum distributif
7. a + 0 = 0 + a = a, 1 . a = a . 1 = a → 0 disebut sebagai identitas terhadap penjumlahan, 1 disebut sebagai identitas terhadap perkalian.

1.1.2. Garis Bilangan

Representasi geometrik suatu bilangan real adalah dengan titik-titik pada sebuah garis yang disebut sumbu real. Maka, garis bilangan adalah suatu penyajian bilangan-bilangan real secara grafis oleh titik-titik pada suatu garis lurus. Untuk tiap bilangan terdapat satu dan hanya satu titik, dan sebaliknya. Akibatnya, penggunaan istilah bilangan dan titik (pada suatu garis bilangan) dapat saling dipertukarkan.

Untuk membentuk suatu garis bilangan pada suatu garis tertentu :

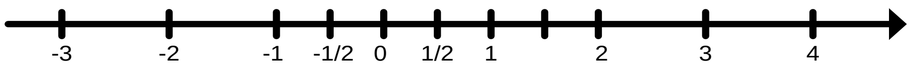
(i) pilih sembarang titik pada garis sebagai titik asal (sesuai dengan 0)

(ii) pilih suatu arah positif (ditunjukkan oleh sebuah ujung panah)

(iii) dengan sembarang satuan ukuran yang cocok, tempatkan titik +1 pada jarak satu satuan dari 0.

Himpunan bilangan real disebelah kanan 0 disebut himpunan bilangan positif, himpunan bilangan real di sebelah kiri 0 disebut himpunan bilangan negatif.

Jika a dan b bilangan yang berbeda, maka $a < b$ berarti bahwa a berada di kiri b pada garis bilangan sedang $a > b$ berarti bahwa a ada di kanan b.



Dalam definisi selang $a < x < b$:

(i) tiap simbol a dan b menyatakan suatu bilangan tunggal dan disebut suatu konstanta

(ii) simbol x menyatakan tiap bilangan suatu himpunan (kumpulan) bilangan-bilangan dan disebut peubah (variabel).

Jangkauan (*range*) suatu peubah adalah nama lain untuk himpunan bilangan yang diwakilinya.

Sebagai contoh :

(1) x adalah suatu jilid himpunan sepuluh jilid buku; jangkauan x adalah himpunan bilangan bulat 1,2,3,.......,10.

(2) x adalah suatu hari di bulan Mei; jangkauan x adalah himpunan 1,2,3,4,........,31.

Dengan cara demikian, maka setiap bilangan real menentukan tepat satu titik pada garis lurus dan sebaliknya setiap titik pada garis lurus menentukan tepat satu bilangan real. Oleh sebab itu, garis lurus sering disebut pula *Garis Bilangan Real*.

1.2. Pertidaksamaan

Peubah (*variable*) adalah lambang (symbol) yang digunakan untuk menyatakan sebarang anggota suatu himpunan. Jika himpunannya *R* maka perubahnya disebut *perubah real*. Selanjutnya, yang dimaksudkan dengan perubah adalah perubah real.

Pertidaksamaan (*inequality*) adalah pernyataan matematis yang memuat satu perubah atau lebih dan salah satu tanda ketidaksamaan ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

Contoh :

a. $5x + 4 \leq 2x - 3$

b. $\dfrac{4x - 1}{2x + 3} > 1$

Ketentuan :

a) $a > 0$ jika dan hanya jika a positif

b) $a < 0$ jika dan hanya jika a negatif

c) $a > 0$ jika dan hanya jika $-a < 0$

d) $a < 0$ jika dan hanya jika $-a > 0$

e) Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$

f) Jika $a < b$, maka $a+c < b+c$, jika c bilangan real

g) Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a+c < b+d$

h) Jika $a < b$ dan c bilangan positif, maka $ac < bc$

i) Jika $a < b$ dan c bilangan negatif, maka $ac > bc$

j) Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$

Menyelesaikan pertidaksamaan :

Menyelesaikan suatu pertidaksamaan dalam x berarti menentukan himpunan semua nilai x yang 'memenuhi' pertidaksamaan tersebut (yang membuat pertidaksamaan tersebut menjadi suatu pertidaksamaan yang benar).

Himpunan semua nilai x yang memenuhi suatu pertidaksamaan disebut sebagai *himpunan penyelesaian* pertidaksamaan tersebut.

Menyelesaikan suatu pertidaksamaan memiliki arti mencari seluruh bilangan real yang dapat dicapai oleh perubah-perubah yang ada dalam pertidaksamaan tersebut sehingga pertidaksamaan tersebut menjadi benar.

Sama halnya dengan persamaan, prosedur untuk menyelesaikan pertidaksamaan satu langkah tiap kali sampai himpunan pemecahan jelas. Dapat melaksanakan operasi-operasi tertentu pada suatu pertidaksamaan tanpa mengubah himpunan pemecahannya. Khususnya :

1. Dapat ditambahkan bilangan yang sama pada kedua pihak suatu pertidaksamaan
2. Dapat dikalikan kedua pihak suatu pertidaksamaan dengan suatu bilangan positif,
3. Dapat dikalikan kedua pihak dengan suatu bilangan negatif, tetapi kemudian harus membalikkan arah tanda pertidaksamaan.

Untuk menangani pertidaksamaan kuadrat, ditunjukkan bahwa suatu faktor linier berbentuk (x – a) adalah positif untuk x > a dan negatif untuk x < a. Ini berarti bahwa hasil kali (x – a)(x – b) dapat berubah dari nilai positif menjadi negatif dan sebaliknya, hanya pada a atau b. Titik pada mana suatu faktor adalah nol, disebut titik-titik pemecah, yang merupakan kunci menentukan himpunan pemecahan dari pertidaksamaan kuadratis atau tingkat lebih tinggi.

Contoh-contoh soal :

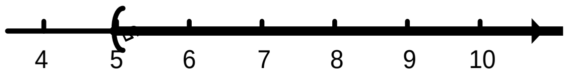
1) Selesaikan pertidaksamaan 4x + 5 > 25

   Penyelesaian :

   4x + 5 > 25 (tambahkan dengan -5)

   4x > 20

   x > 5



   Maka nilai x yang memenuhi untuk pertidaksamaan diatas adalah : x > 5

2) Selesaikan pertidaksamaan 2x – 7 < 4x -2 dan perlihatkan grafik himpunan.

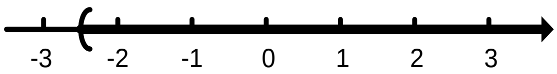
   Penyelesaian :

   2x – 7 < 4x – 2

   2x < 4x + 5 (tambahkan 7)

   - 2x < 5 (tambahkan – 4x)

   x > -5/2 (kalikan dengan – ½)



$$\left(\frac{-5}{2};\infty\right)=\left\{x : x>\frac{-5}{2}\right\}$$

3) Selesaikanlah pertidaksamaan kuadrat berikut ini : $x^2 - x < 6$

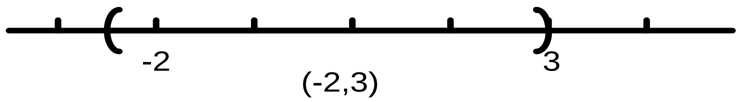
   Penyelesaian :

   Seperti persamaan kuadrat, pindahkan semua suku bukan nol ke salah satu ruas dan faktornya.

$$x^2 - x < 6$$
$$x^2 - x - 6 < 0 \qquad \text{(tambahkan } -6\text{)}$$
$$(x-3)(x+2) < 0 \quad \text{(faktorkan)}$$

-2 dan 3 adalah titik-titik pemecahannya, titik-titik ini membagi garis riil menjadi tiga selang (-∞, -2), (-2, 3) dan (3, ∞). Pada tiap selang ini (x – 3)(x + 2) bertanda tetap, yakni selalu positif atau selalu negatif. Untuk mencari tanda ini dalam tiap selang dipakai titik-titik uji -3, 0, dan 5 (sembarang titik pada ketiga selang tersebut yang memenuhi).

Hasilnya : titik uji -3 bertanda positif (+) ; titik uji 0 bertanda negatif (-) dan titik uji 5 bertanda positif (+). Sehingga dapat disimpulkan bahwa himpunan pemecahannya adalah selang (-2,3).



4) Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $2x - 5 < 5x + 7$.

Penyelesaian:

$$2x - 5 < 5x + 7$$
$$2x - 5 - 5x + 5 < 5x + 7 - 5x + 5$$
$$-3x < 12$$
$$-3x.(-1/3) > 12.(-1/3)$$
$$x > -4$$

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan di atas adalah $\{x \in R |\ x > -4\}$.

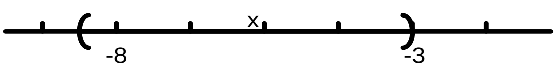
5) Tentukan harga x yang memenuhi dari pertidaksamaan berikut ini: 10 < -2x + 4 < 20.

Penyelesaian :

10 < -2x + 4 < 20

-2x + 4 > 10	atau	-2x + 4 < 20
-x > 3		-x < 8
x< -3		x > -8

Jadi, penyelesaian dari pertidaksamaan adalah : -8 < x < -3 ➲



6) Tentukan harga x yangmemenuhi pertidaksamaan : $2x^2 + 5x - 3 < 0$

Penyelesaian :

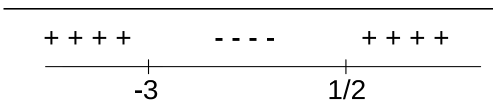
Selesaikan dengan bantuan persamaan :

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

$(2x - 1)(x + 3) = 0$

$(2x - 1) = 0 \rightarrow x = ½$ dan

$(x + 3) = 0 \rightarrow x = -3$



Daerah yang memenuhi sesuai dengan soal (f(x) < 0) atau daerah negatif adalah:

$-3 < x < ½$

Pertidaksamaan tipe lain mungkin lebih sulit diselesaikan dibandingkan pertidaksamaan-pertidaksamaan seperti pada contoh di atas. Beberapa contoh diberikan pada bagian berikut.

Contoh :

1. Tentukan penyelesaian pertidaksamaan : $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Penyelesaian:

Dengan memfaktorkan ruas kiri pertidaksamaan, maka diperoleh:

$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

Telah diketahui bahwa hasil kali 2 bilangan real positif apabila ke dua faktor positif atau ke dua faktor negatif. Oleh karena itu,

(i). Jika ke dua faktor positif maka:

$x - 2 > 0$ dan $x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow x > 2$ dan $x > 3$

Sehingga diperoleh: $x > 3$.

(ii). Jika ke dua faktor negatif, maka:

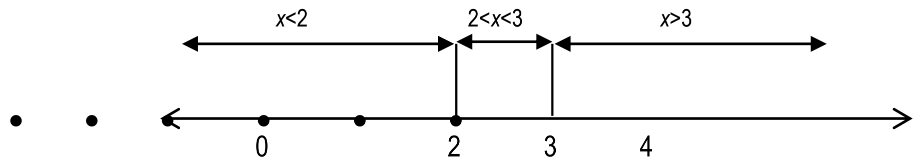
$x - 2 < 0$ dan $x - 3 < 0$

$\Leftrightarrow x < 2$ dan $x < 3$

Diperoleh: $x < 2$.

Jadi, penyelesaian adalah : $\{x \in R |\ x < 2 \text{ atau } x > 3\}$.

Penyelesaian pertidaksamaan di atas dapat pula diterangkan sebagai berikut : ruas kiri pertidaksamaan bernilai nol jika $x = 2$ atau $x = 3$. Selanjutnya, ke dua bilangan ini membagi garis bilangan menjadi 3 bagian: $x < 2, 2 < x < 3$, dan $x > 3$ (Gambar 1.2).



Gambar 1.2. Grafik penyelesain Pertidaksamaan

Pada bagian $x < 2$, nilai $(x-2)$ dan $(x-3)$ keduanya negatif, sehingga hasil kali keduanya positif. Pada segmen $2 < x < 3$, $(x-2)$ bernilai positif sedangkan $(x-3)$ bernilai negatif. Akibatnya, hasil kali keduanya bernilai negatif. Terakhir, pada bagian $x > 3$, $(x-2)$ dan $(x-3)$ masing-masing bernilai positif sehingga hasil kali keduanya juga positif. Rangkuman uraian di atas dapat dilihat pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1. Penyelesaian pertidaksamaan : $x^2 - 5x + 6 > 0$

	Tanda nilai			Kesimpulan
	$x-2$	$x-3$	$(x-2)(x-3)$	
$x < 2$	$-$	$-$	$+$	Pertidaksamaan dipenuhi.
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$	Pertidaksamaan tidak dipenuhi.
$x > 3$	$+$	$+$	$+$	Pertidaksamaan dipenuhi.

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan adalah $\{x \in R \mid x < 2 \text{ atau } x > 3\}$.

1.3. Nilai mutlak

Nilai mutlak (absolut) dari suatu bilangan real didefinisikan sebagai berikut :

$|x| = x$ jika $x \geq 0$

$|x| = -x$ jika $x < 0$

Misalnya : $|4| = 4$, karena $4 \geq 0$ dan $|-2| = -(-2) = 2$, karena $-2 < 0$

Nilai mutlak suatu bilangan adalah panjang/jarak bilangan tersebut dari bilangan 0. Jadi, nilai mutlak 5 adalah 5, nilai mutlak –7 adalah 7, nilai mutlak 0 adalah 0, dan seterusnya.

Sifat-sifat dari harga mutlak :

Jika a, b ε R, maka :

1) $|a| < b$ jika dan hanya jika $-b < a < b$, dimana $b > 0$

2) $|a| > b$ jika dan hanya jika $a < -b$ atau $a > b$

3) $|ab| = |a||b|$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

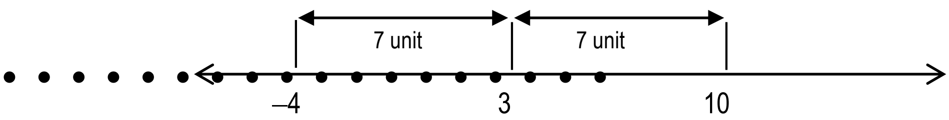
5) $|a + b| \leq |a| + |b|$

6) $|a - b| \geq |a| + |b|$

7) $|a - b| \leq |a| + |b|$

Jarak antara dua titik sebarang (bilangan real) a dan b pada sumbu real adalah $|a-b| = |b-a|$.

Secara geometris, nilai mutlak $|x-a|$ dapat diartikan sebagai jarak dari *a* ke *x*. Sebagai contoh, jika $|x-3| = 7$ maka artinya *x* berjarak 7 unit di sebelah kanan atau di sebelah kiri 3 (Gambar 1.3).



Gambar 1.3. Grafik Bilangan Pertidaksamaan

Jadi, penyelesaian $|x-3| = 7$ adalah $\{-4, 10\}$.

Jika $a \geq 0$, maka: $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$.

Sebagai contoh,

$|x| = 4$ berarti $x = 4$ atau $x = -4$

$|3x| = 5 \Leftrightarrow 3x = 5$ atau $3x = -5$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ atau $x = -\frac{5}{3}$

Secara sama,

$|2x-3| = 7$ berarti $2x - 3 = 7$ atau $2x - 3 = -7$

$2x = 10$ atau $2x = -4$

$x = 5$ atau $x = -2$

Contoh-contoh soal :

1) Carilah harga x yang memenuhi $|x - 7| < 6$

Penyelesaian :

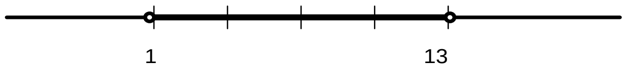
$|x - 7| < 6$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $-(x - 7) < 6$

$x - 7 < 6$ $\quad$ atau $\quad\quad$ $-x + 7 < 6$

$x < 13$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $-x < -1$

$x > 1$

Harga x yang memenuhi : $1 < x < 13$



2) Tentukan harga x yang memenuhi : $|5x - 3| = |6x + 2|$

Penyelesaian :

$|5x - 3| = |6x + 2|$ $\quad\quad$ atau $\quad\quad$ $5x - 3 = -(6x + 2)$

$5x - 3 = 6x + 2$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $5x - 3 = -6x - 2$

$x = -5$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $x = \frac{1}{11}$

3) Selesaikan $|2x - 3| \geq 7$

Penyelesaian :

$$|2x - 3| \geq 7 \Leftrightarrow (2x - 3) \leq -7 \text{ atau } (2x - 3) \geq 7$$
$$\Leftrightarrow 2x \leq -4 \text{ atau } 2x \geq 10$$
$$\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ atau } x \geq 5$$

Jadi, penyelesaian adalah $\{x \in R | x \leq -2 \text{ atau } x \geq 5\}$.

4) Tentukan semua nilai *x* sehingga $\left|\frac{2x}{x-2}\right| \leq 3$.

Penyelesaian:

$$\left|\frac{2x}{x-2}\right| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{2x}{x-2} \leq 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} \geq -3 \text{ dan } \frac{2x}{x-2} \leq 3$$

Selanjutnya, karena:

(i). $\frac{2x}{x-2} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} + 3 \geq 0$
$$\Leftrightarrow \frac{5x-6}{x-2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5} \text{ atau } x > 2$$

(ii). $\frac{2x}{x-2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} - 3 \leq 0$
$$\Leftrightarrow \frac{-x+6}{x-2} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ atau } x \geq 6$$

maka, diperoleh: $x \leq \frac{6}{5}$ atau $x \geq 6$.

1.4. Rangkuman

Kalkulus didasarkan pada sistem bilangan riel dan sifat-sifatnya, dimana hasil dari penyelesaian dari suatu persamaan dan pertidaksamaan dapat dinyatakan dalam garis bilangan. Himpunan bilangan real adalah himpunan bilangan yang merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional.

1.5. Latihan

1. Tentukan harga x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini dan perlihatkan himpunan penyelesaiannya pada garis real :

   a) $x^2 - 17x + 70 \leq 0$ c) $(x + 3)(x - 2)(x - 4) < 0$

   b) $2x^2 - 5x - 4 \leq 0$ d) $(x + 1)^2(x - 3) > 0$

2. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan yang diberikan dibawah ini :

   a) $|2x + 5| < 4$ c) $|4x + 2| \geq 10$

   b) $|2x - 7| > 3$ d) $|x - 2| < 3|x + 7|$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 2
SISTEM KOORDINAT

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat menjelaskan konsep sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub/polar.
Sub Pokok Bahasan	:	2.1. Sistem koordinat 2.1.1. Sistem Koordinat Cartesius. 2.1.2. Sistem Koordinat Kutub (Polar) 2.2. Hubungan Antara Sistem Koordinat Cartesius dan Sistem Koordinat Kutub 2.3. Jarak Dua Titik Koordinat Kutub
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum

		Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

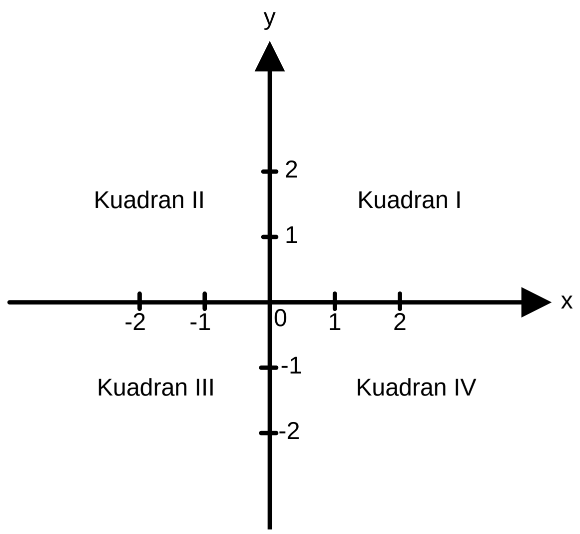
Dalam pelajaran Kalkulus, ada materi mengenai koordinat yang banyak manfaatnya untuk kehidupan sehari-hari. Dalam teorinya terdapat koordinat cartesius dan koordinat kutub yang bisa saling dikonversikan.

2.1. Sistem Koordinat

Sistem koordinat adalah suatu cara/metode untuk menentukan letak suatu titik. Ada beberapa macam sistem koordinat: Sistem Koordinat Cartesius, Sistem Koordinat Kutub, Sistem Koordinat Tabung, dan Sistem Koordinat Bola.

2.1.1. Sistem Koordinat Cartesius

Sistem koordinat Cartesius untuk bidang terdiri dari dua sumbu koordinat, sumbu x dan sumbu y, yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik asal (0,0).

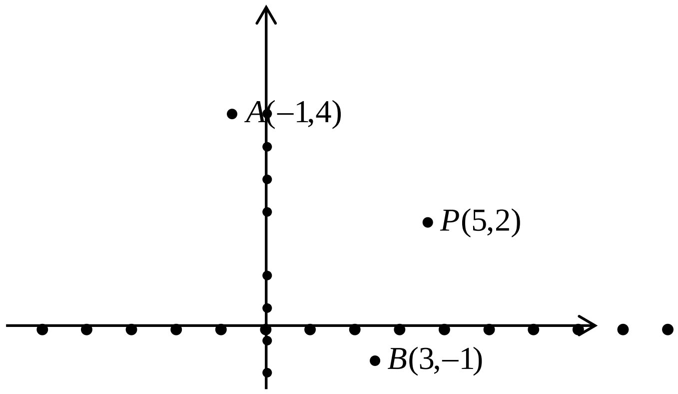


Gambar 2.1. Koordinat Cartesius

Bidang Cartesius terbagi atas empat *kuadran*. Setiap titik pada bidang Cartesius dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan (x, y), dan sebaliknya pasangan bilangan (x, y) menyatakan titik tertentu pada bidang.

Jarak antara dua titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ adalah : $d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

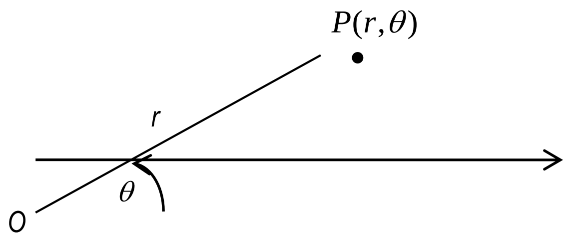
letak sebarang titik pada bidang dinyatakan dengan pasangan berurutan (x,y). Titik $P(x,y)$ mempunyai arti bahwa jarak titik *P* ke sumbu-*x* dan sumbu-*y* masing-masing adalah $|y|$ dan $|x|$. Apabila $x<0$ (atau $y<0$) maka titik *P* berada di sebelah kiri (atau sebelah bawah) titik asal *O* dan apabila $x>0$ (atau $y>0$) maka titik *P* terletak di sebelah kanan (atau sebelah atas) titik asal *O*. Dalam hal ini, *x* disebut *absis* titik *P* sedangkan *y* disebut *ordinat* titik *P*.



Gambar 2.2. Jarak antara dua titik

2.1.2. Sistem Koordinat Kutub (Polar)

Pada sistem koordinat Cartesius, letak titik pada bidang dinyatakan dengan pasangan (x, y), dengan *x* dan *y* masing-masing menyatakan jarak berarah ke sumbu-*y* dan ke sumbu-*x*. Pada sistem koordinat kutub, letak sebarang titik *P* pada bidang dinyatakan dengan pasangan bilangan real (r, θ), dengan *r* menyatakan jarak titik *P* ke titik *O* (disebut *kutub*) sedangkan θ adalah sudut antara sinar yang memancar dari titik *O* melewati titik *P* dengan sumbu-*x* positif (disebut *sumbu kutub*) (Gambar 2.3).



Gambar 2.3. Sistem koordinat kutub

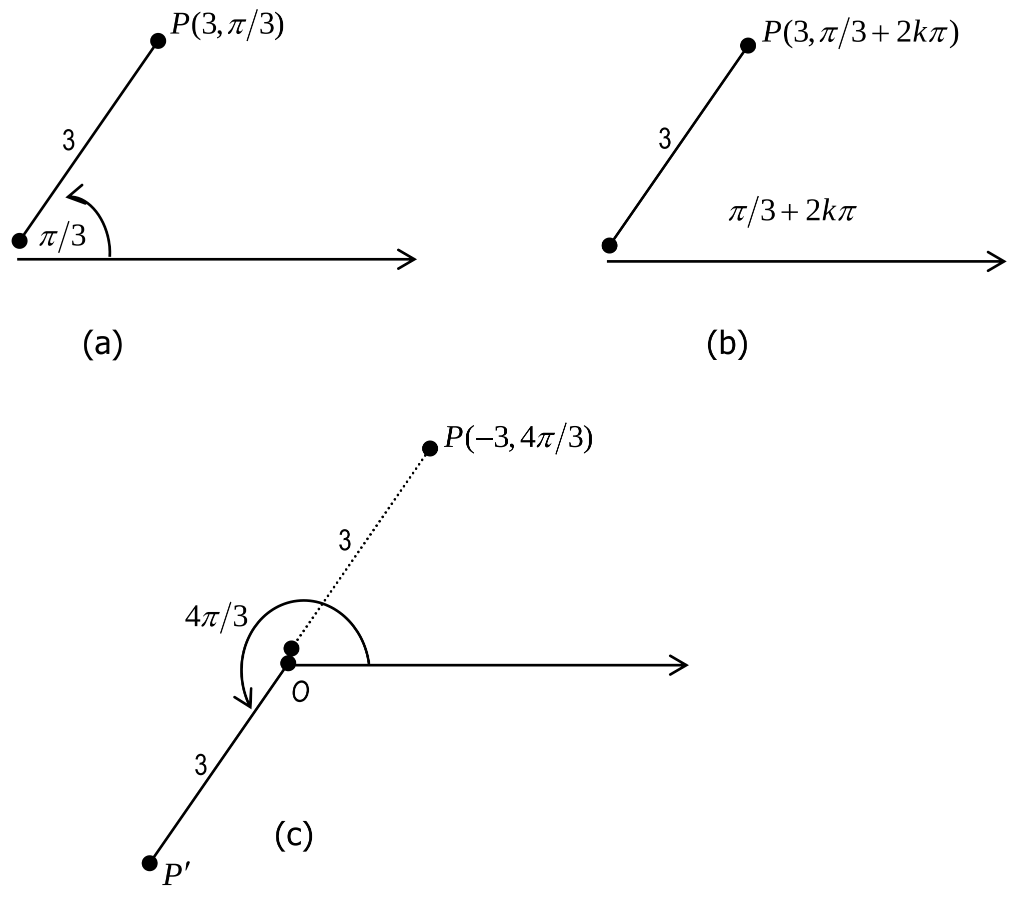
Berbeda dengan sistem koordinat Cartesius, dalam koordinat kutub letak suatu titik dapat dinyatakan dalam tak hingga banyak koordinat. Sebagai contoh, letak titik $P(3, \pi/3)$ dapat digambarkan dengan cara terlebih dulu melukiskan sinar yang memancar dari titik asal *O* dengan sudut sebesar $\frac{\pi}{3}$ radian terhadap sumbu mendatar arah positif. Kemudian titik *P* terletak pada sinar tadi dan berjarak 3 satuan dari titik asal *O* (Gambar 2.4 (a)). Titik *P* dapat pula dinyatakan dalam koordinat

$(3, \pi/3 + 2k\pi)$, dengan *k* bilangan bulat (lihat Gambar 2.4 (b)). Mudah ditunjukkan pula bahwa koordinat $(-3, 4\pi/3)$ pun juga menggambarkan titik *P* (Gambar 2.4 (c)). Pada koordinat yang terakhir, jarak bertanda negatif. Hal ini dikarenakan titik *P* terletak pada bayangan sinar OP'.

Secara umum, jika (r, θ) menyatakan koordinat kutub suatu titik maka koordinat titik tersebut dapat pula dinyatakan sebagai berikut :

$(r, \theta + 2k\pi)$ atau $(-r, \theta + (2k+1)\pi)$ dengan *k* bilangan bulat.

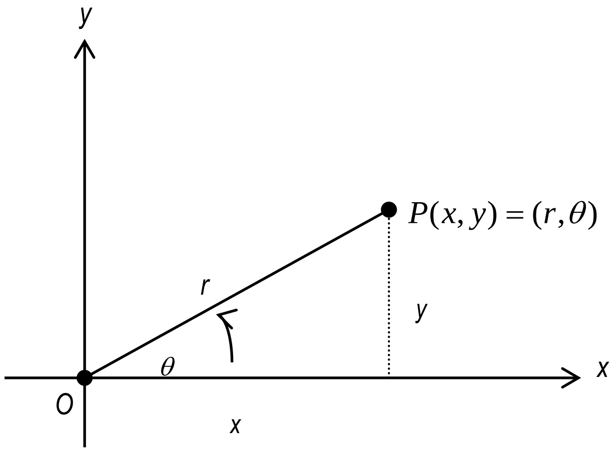
Kutub mempunyai koordinat $(0, \theta)$ dengan θ sebarang bilangan.



Gambar 2.4. Berbagai pernyataan koordinat kutub untuk suatu titik.

2.2. Hubungan Antara Sistem Koordinat Cartesius dan Sistem Koordinat Kutub

Suatu titik *P* berkoordinat (x, y) dalam sistem koordinat Cartesius dan (r, θ) dalam sistem koordinat kutub. Apabila kutub dan titik asal diimpitkan, demikian pula sumbu kutub dan sumbu-*x* positif juga diimpitkan, maka kedudukan titik dapat digambarkan seperti pada gambar 2.5.



Gambar 2.5. Kedudukan titik

Dari rumus segitiga diperoleh hubungan sebagai berikut :

(2.1) $\quad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad$ atau:

(2.2) $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Nyatakan ke dalam system koordinat Cartesius.

a. $A\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ b. $B\left(-5, \frac{\pi}{4}\right)$ c. $C\left(-3, -\frac{5\pi}{6}\right)$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan (2.1) :

a. $x = 4\cos\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad y = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

Jadi, $A\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

b. $x = -5\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \qquad y = -5\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Jadi, dalam sistem koordinat Cartesius $B\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.

c. $x = -3\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ $y = -3\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

Jadi, $C\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Apabila $x \neq 0$ maka persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai:

(2.3) $\qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ x \neq 0$

Hati-hati apabila menggunakan persamaan (3.3), karena $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ akan memberikan 2 nilai θ yang berbeda, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Untuk menentukan nilai θ yang benar perlu diperhatikan letak titik *P*, apakah di kwadran I atau II, ataukah dikwadran II atau IV. Apabila dipilih nilai θ yang lain, maka $r = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Nyatakan ke dalam sistem koordinat kutub:

a. $P(4,-4)$ $\qquad$ b. $Q(-4,4)$

Penyelesaian:

Dari persamaan (2.3), diperoleh:

a. $r = \pm\sqrt{4^2 + (-4)^2} = \pm 4\sqrt{2}$

$$\theta = \arctan\frac{4}{-4} = \frac{3\pi}{4} \text{ atau } \frac{7\pi}{4}$$

Selanjutnya, karena letak titik *P* di kwadran IV, maka:

$r = 4\sqrt{2}$ dengan $\theta = \frac{7\pi}{4}$, atau

$r = -4\sqrt{2}$ dengan $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Jadi, $P\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ atau $P\left(-4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

b. $r = \pm\sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \pm 4\sqrt{2}$

$$\theta = \arctan\frac{-4}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ atau } \frac{7\pi}{4}$$

Selanjutnya, karena letak titik *Q* di kwadran II, maka:

$r = 4\sqrt{2}$ dengan $\theta = \frac{3\pi}{4}$, atau

$r = -4\sqrt{2}$ dengan $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

Jadi, $Q\left(4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ atau $Q\left(-4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

3. Nyatakan persamaan $r = 2a\sin\theta$ ke dalam sistem koordinat Cartesius.

Penyelesaian:

Jika ke dua ruas persamaan di atas dikalikan dengan *r* maka diperoleh :

$$r^2 = 2a(r\sin\theta)$$

Selanjutnya, karena $r^2 = x^2 + y^2$ dan $r\sin\theta = y$ maka:

$$x^2 + y^2 = 2ay$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay = 0,$$

yaitu persamaan lingkaran dengan pusat $(0, a)$ dan jari-jari $|a|$.

2.3. Jarak Dua Titik Koordinat Kutub

Cara menghitung jarak dua titik koordinat kutub adalah dengan menggunakan jarak dua titik pada koordinat Cartesius. Koordinat kutub diubah terlebih dahulu menjadi koordinat Cartesius.

Menetukan jarak antara titik $A(r_1, \theta_1)$ dan titik $B(r_2, \theta_2)$:

a. Koordinat Cartesiusnya adalah :

   $A(r_1, \theta_1) \Rightarrow x_1 = r_1 \cos\theta_1$ dan $y_1 = r_1 \sin\theta_1 \rightarrow A(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$

   $B(r_2, \theta_2) \Rightarrow x_2 = r_2 \cos\theta_2$ dan $y_2 = r_2 \sin\theta_2 \rightarrow B(r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$

b. Jarak titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$ adalah :

$$\text{Jarak} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1)^2 + (r_2\sin\theta_2 - r_1\sin\theta_1)^2}$$
$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1.r_2.\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

   Maka jarak titik $A(r_1, \theta_1)$ dan titik $B(r_2, \theta_2)$ adalah :

$$\text{Jarak} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1.r_2.\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Tentukan jarak titik A(4, 160^0) dan B(5, 100^0)

Penyelesaian :

Jarak titik A dan titik B adalah : $= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1.r_2.\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$$= \sqrt{4^2 + 5^2 - 2(4)(5).\cos(160^0 - 100^0)}$$

$$= \sqrt{16 + 25 - 40.\cos(60^0)}$$

$$= \sqrt{41 - 40.\frac{1}{2}} = \sqrt{21}$$

Jadi, jarak kedua titik A dan B adalah $\sqrt{21}$

2.4. Rangkuman

Sistem koordinat adalah suatu metode untuk menentukan letak suatu titik. Dengan menggunakan sistem koordinat cartesius, bentuk-bentuk geometri seperti kurva dapat diekspresikan dengan persamaan aljabar. Pada era modern ini koordinat cartesius banyak digunakan. Di dalam kehidupan sehari-hari dalam bidang koordinat cartesius sangat mutlak diperlukan, salah satunya yaitu dalam soal penerbangan.

2.5. Latihan

Untuk soal 1 – 8, nyatakan masing-masing dengan dua koordinat yang lain, satu dengan $r > 0$ dan yang lain dengan $r < 0$.

1. $(6, \pi/3)$
2. $(-3, 2\pi/5)$
3. $(5, -\pi/4)$
4. $(5, 7\pi/4)$
5. $(\sqrt{2}, 5\pi/2)$
6. $(-7, -5\pi/6)$
7. $(6, -7\pi/3)$
8. $(4, 6\pi/7)$

Untuk soal 9 – 16, nyatakan dalam sistem koordinat Cartesius.

9. $(6, 2\pi/3)$
10. $(-4, \pi/8)$
11. $(5, -\pi/4)$
12. $(6, 7\pi/4)$
13. $(\sqrt{2}, 5\pi/2)$
14. $(-7, -5\pi/6)$
15. $(6, -7\pi/3)$
16. $(4, 7\pi/8)$

Untuk soal 17 – 23, ubahlah ke dalam sistem koordinat kutub.

17. $(-3,-3)$

18. $(2,2)$

19. $(-2,2\sqrt{3})$

20. $(\sqrt{3},1)$

21. $(0,-11)$

22. $(3\sqrt{3},-3)$

23. $(-\sqrt{2}/3,\sqrt{6}/3)$

Untuk soal 24 – 29, nyatakan masing-masing persamaan ke dalam sistem koordinat Cartesius.

24. $r = 3\cos\theta$

25. $r^2 = 1 + \sin\theta$

26. $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$

27. $r = -4$

28. $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$

29. $r^2 = \theta$

Nyatakan persamaan pada soal 30 – 33 ke dalam sistem koordinat kutub.

30. $x - y = 0$

31. $y^2 = 1 - 4x$

32. $xy = 1$

33. Tunjukkan bahwa jarak titik $P(r,\theta)$ dan $Q(R,\varphi)$ adalah:

$$d = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \theta)}$$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 3
VARIABEL DAN FUNGSI

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa dapat memahami dan mengerti tentang variabel dan fungsi dalam memecahkan persoalan matematika.
Sub Pokok Bahasan	:	3.1. Fungsi dari sebuah variabel 3.2. Fungsi Aljabar dan Grafik dari Suatu Fungsi 3.2.1. Fungsi Linier (Fungsi Garis Lurus) 3.2.2. Fungsi Kuadrat 3.3. Operasi pada Fungsi 3.4. Fungsi Trigonometri
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga.

		4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Dalam matematika aljabar akan ditemukan simbol-simbol yang berhimpitan dengan angka, sehingga membentuk sebuah susunan/sistem yang dikenal dengan fungsi matematika. Variabel dan fungsi merupakan kata kunci untuk menyelesaikan atau mengembangkan sistem tersebut. Pemahaman tentang variabel dan fungsi sangat dibutuhkan yang akan mendukung dalam memecahkan dan membuat fungsi-fungsi matematika.

3.1. Fungsi dari Sebuah Variabel

Fungsi merupakan suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara satu variabel dengan variabel lain.

Unsur-unsur pembentuk suatu fungsi adalah :

- variabel,
- koefisien dan
- konstanta

a) Variabel

Variabel merupakan unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu. Berdasarkan kedudukan/sifatnya variabel dibedakan atas :

- variabel bebas, yaitu variabel yang nilainya tidak tergantung pada variabel lain.
- variabel terikat (tetap), yaitu variabel yang nilainya tergantung pada variabel lain

b) Koefisien dan Konstanta

Koefisien adalah bilangan/angka yang terkait pada dan terletak didepan suatu variabel dalam sebuah fungsi.

Konstanta adalah: bilangan atau angka yang (kadang-kadang) turut membentuk sebuah fungsi tetapi berdiri sendiri sebagai bilangan dan tidak terkait pada suatu variabel tertentu.

Sebuah variabel y disebut fungsi dari variabel x jika terdapat suatu hubungan, sehingga untuk setiap harga x dalam daerahnya dapat ditentukan suatu nilai y, x disebut variabel bebas, sedang y disebut variabel tidak bebas karena nilainya ditentukan pilihan nilai x.

Simbol f(x) dibaca ”f fungsi x” atau ”fungsi dari x” digunakan untuk menyatakan fungsi dari x. Jika dalam soal yang sama dijumpai fungsi lain dari x, maka digunakan notasi lain sebagai berikut : g(x), h(x), F(x), G(x), ...

Dalam mempelajari fungsi y = f (x) perlu diketahui daerah dari variabel bebas x, juga disebut ”domain” yang menentukan dari fungsi.

a. Fungsi f (x) dikatakan tertentu dalam suatu interval jika dapat ditentukan untuk setiap nilai x dari inteval tersebut.
b. Jika f(x) adalah fungsi dari x dan a dalam domain yang menentukan, maka f (a) diartikan sebuah bilangan yang diperoleh dari f (x) dengan menggantikan x oleh a.

Contoh :

Jika f(x) = $x^3 - 4x + 2$, maka :

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2$$

$$f(a) = (a)^3 - 4(a) + 2 = a^3 - 4a + 2$$

3.2. Fungsi Aljabar dan Grafik dari Suatu Fungsi

Fungsi Aljabar terdiri dari :

- Fungsi Linier
- Fungsi Kuadrat
- Fungsi pangkat banyak
- Fungsi pecah

Grafik dari suatu fungsi

Bilamana daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan bilangan riil, dapat dibayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan y = f(x).

3.2.1. Fungsi Linier (Fungsi Garis Lurus)

Fungsi Linier (fungsi garis lurus) adalah suatu fungsi dimana variabel bebasnya paling tinggi berpangkat satu.

Bentuk umum fungsi linier adalah :

y = f(x) = ax + b $\rightrightarrows$ a & b : konstanta x : variabel bebas

y : variabel tidak bebas/yang dipengaruhi

Contoh Fungsi Linier

1) Gambarkan grafik dari fungsi berikkut : y = 3x + 2

Penyelesaian :

▶ Dengan menggunakan tabel x dan y :

X	-2	-1	0	1	2
Y	-4	-1	2	5	8

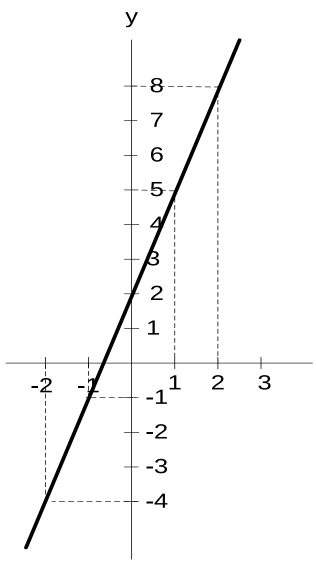
▶ Dengan menggambarkan grafik fungsi

- titik potong dgn sumbu y :

  pada x = 0, maka y = 2 ➔ titiknya adalah A (0,2)

- titik potong fungsi dgn sumbu x :

  Pada y = 0, maka x = -2/3 ➔ titiknya adalah B (-2/3 ; 0)



Gambar 3.1. Grafik fungsi Linier

3.2.2. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat merupakan Suatu fungsi *non-linier* (garis tidak lurus) yang variabel bebasnya berpangkat dua.

Grafik dari fungsi kuadrat apabila digambarkan merupakan garis tidak lurus yang berbentuk parabola.

Bentuk umum fungsi kuadrat :

1) $y = f(x)$ ➔ $y = ax^2 + bx + c$

   dimana : a, b, c : a dan b adalah koefisien dan c adalah Konstanta

   x : variabel bebas

   y : variabel tdk bebas

2) $x = f(y)$ ➔ $x = ay^2 + by + c$

   dimana : a, b, c : a dan b adalah koefisien dan c adalah Konstanta

   y : variabel bebas

   x : variabel tdk bebas

Ciri-ciri matematis dari fungsi kuadrat, bila $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, adalah :

a) Titik potong fungsi dgn sumbu y adalah pada x = 0, maka y = c.

   Titiknya adalah a (0,c)

b) Titik potong fungsi dengan sumbu x adalah pada y = 0, jadi $ax^2 + bx + c = 0$.

   Ada 3 kemungkinan yang terjadi, yaitu :

   i) Bila deskriminan (D) ➔ $b^2 - 4ac > 0$, maka terdapat 2 buah titik potong :

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}} \qquad \text{dan} \qquad x_2 = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$

   ii) Bila D = 0 ($b^2 - 4ac = 0$), maka hanya terdapat satu buah titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu x.

   iii) Bila D < 0, maka tidak terdapat titik potong fungsi kuadrat dengan sumbu x.

c) Titik puncak, yaitu titik dimana arah dari grafik fungsi kuadrat (parabola) kembali ke arah semula.

   Titik puncak : $P = \left(x = \frac{-b}{2a} = \frac{-D}{4a} ; y = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} \right)$

d) sumbu simetri adalah sumbu yang membagi/membelah dua grafik fungsi kuadrat menjadi dua bagian yang sama.

   Persamaan sumbu simetri : $x = \frac{-b}{2a}$

Contoh soal :

1) Buatlah sketsa grafik dari : $y = x^2 - 5x + 6$

   Penyelesaian :

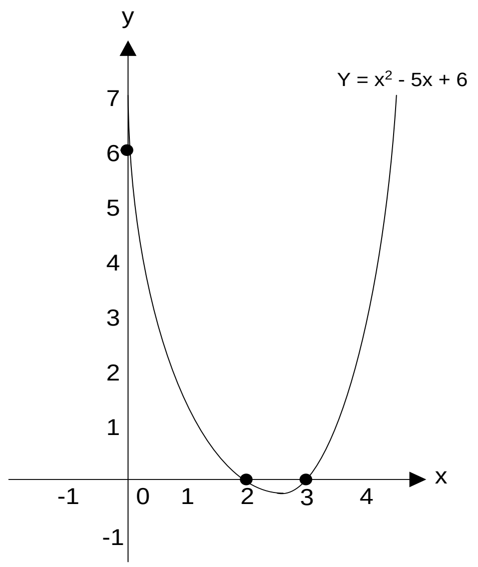
Gunakan daerah asal mula (domain natural), buat sebuah tabel nilai, rajah titik-titik yang berpadanan, hubungkan titik-titik ini dengan sebuah kurva mulus.

- Titik potong fungsi dengan sumbu y adalah pada x = 0, y = 6
  titiknya : A (0,6)
- Titik potong fungsi dengan sumbu x pd y = 0, dimana :
  D = $b^2 - 4ac$ = 25 – 4(6) = 1 > 1. Maka terdapat 2 titik potong :

  a) $x_1 = \frac{5+\sqrt{25-4(6)}}{2} = 3$ ➔ titiknya B_1 (3,0)

  b) $x_2 = \frac{5-\sqrt{25-4(6)}}{2} = 2$ ➔ titiknya B_2 (2,0)

- Titik puncak : $P = \left(x = \frac{5}{2} \;;\; y = \frac{-(25-4(6)}{4} = -1/4 \right)$



Gambar 3.2. Grafik fungsi kuadrat : y = $x^2 - 5x + 6$

2) Diketahui fungsi y = f(x) = $-x^2 + 6x - 9$, gambarkan grafik fungsi tersebut.

3.3. Operasi pada Fungsi

Fungsi bukanlah bilangan, tetapi seperti halnya dua bilangan a dan b dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah bilangan baru a + b, demikian juga dua fungsi f dan g dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah fungsi baru f + g.

Tabel 3.1 Tabel operasi fungsi

Operasi pada fungsi	Rumus
Penjumlahan	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Selisih	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Hasil Kali	$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$
Hasil Bagi	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Contoh-contoh soal :

1) Jika $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 4x + 4$, tentukan hasil operasi berikut :

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

c) $(fg)(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Penyelesaian :

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (2x + 3) + (x^2 - 4x + 4)$

$= x^2 - 2x + 7$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (2x + 3) - (x^2 - 4x + 4)$

$= -x^2 + 6x - 1$

c) $(fg)(x) = f(x).g(x)$

$= (2x + 3) + (x^2 - 4x + 4)$

$= 2x^3 - 8x^2 + 8x + 3x^2 - 12x + 12$

$= 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{2x+3}{x^2 - 4x + 4}$

2) Diketahui $g(x) = e^{2x} + 3x^2$ dan $g(x) = 4e^{2x} - 2x^2 + 8$, tentukan hasil operasi berikut :

a) $(f + g)(x)$ c) $(fg)(x)$

b) $(f - g)(x)$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Penyelesaian :

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (e^{2x} + 3x^2) + (4e^{2x} - 2x^2 + 8)$

$= (1 + 4)e^{2x} + (3 - 2)x^2 + 8$

$= 5e^{2x} + x^2 + 8$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (e^{2x} + 3x^2) - (4e^{2x} - 2x^2 + 8)$

$= (1 - 4)e^{2x} + (3 + 2)x^2 - 8$

$= -3e^{2x} + 5x^2 - 8$

c) $(fg)(x) = f(x).g(x)$

$= (e^{2x} + 3x^2) . (4e^{2x} - 2x^2 + 8)$

$= 4e^{4x} - 2x^2e^{2x} + 8e^{2x} + 12x^2e^{2x} - 6x^4 + 24x^2$

$= 4e^{4x} + 8e^{2x} + 10x^2e^{2x} - 6x^4 + 24x^2$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{e^{2x} + 3x^2}{4e^{2x} - 2x^2 + 8}$$

3) Jika $f(x) = 2x^2 - x$, maka tentukanlah $f(x + 2)$

Penyelesaian :

$f(x+1) = 2(x+2)^2 - (x+2)$

$= 2\left(x^2 + 4x + 4\right) - (x+2)$

$= 2x^2 + 8x + 8 - x - 2$

$= 2x^2 + 7x + 6$

4) Diketahui $f(x) = e^x$, maka tentukanlah : $\frac{f(x+2)}{f(x-1)}$

Penyelesaian :

$$\frac{f(x+2)}{f(x-1)} = \frac{e^{(x+2)}}{e^{(x-1)}}$$

$$= e^{(x+2)-(x-1)} = e^3$$

5) Jika $f(x) = \dfrac{x+3}{2x^2 - 1}$, maka tentukanlah f(0), f(3a) dan f(1/x)

Penyelesaian :

$$f(0) = \frac{0+3}{0-1} = -3$$

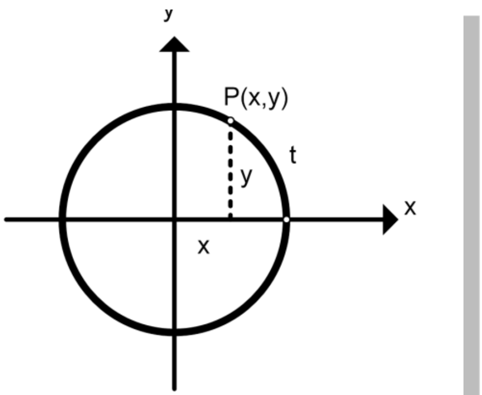
$$f(3a) = \frac{3a+3}{2(3a)^2 - 1} = \frac{3a+3}{18a^2 - 1}$$

$$f(1/x) = \frac{1/x + 3}{2(1/x)^2 - 1} = \frac{1+3x}{x} . \frac{x^2}{2 - x^2} = \frac{x + 3x^2}{2 - x^2}$$

3.4. Fungsi Trigonometri

Trigonometri merupakan bagian dari matematika yang mempelajari relasi antara sudut dan sisi-sisi pada suatu segitiga dan juga fungsi-fungsi dasar dari relasi-relasi tersebut.

Sifat-sifat dasar Sinus dan Kosinus



Gambar 3.3. Lingkaran Satuan

Andaikan t menentukan titik P(x,y) seperti ditunjukkan diatas. Maka

sin t = y dan cos t = x

x dan y bervariasi antara -1 dan 1, sehingga :

$|\sin\ t| \leq 1$ $\qquad$ $|\cos\ t| \leq 1$

Karena t dan t + 2π menentukan titik P(x , y) yang sama,

$\sin(t + 2\pi) = \sin t$ $\qquad$ $\cos(t + 2\pi) = \cos t$

sin (-x) = - sin x $\qquad$ cos(-x) = cos x

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t \qquad\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$$

Kesamaan penting yang menghubungkan fungsi-fungsi sinus dan kosinus :

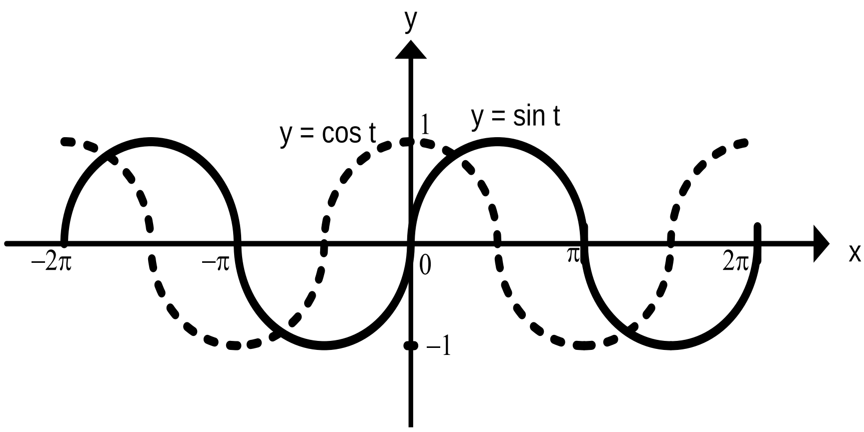
$$\sin^2 t+\cos^2 t=1 \qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t} \qquad \sec t=\frac{1}{\cos t}$$

$$\csc t=\frac{1}{\sin t}$$

Grafik Sinus dan Kosinus

Untuk menggambarkan grafik *y = sin t* dan *y = cos t* dalam mode radian dapat diberikan sebagai berikut :



Gambar 3.4. Grafik Sinus dan Kosinus

Empat hal tentang grafik pada gambar 2.4 :

1. *Sin t* dan *cos t* keduanya berkisar dari -1 sampai 1
2. Kedua grafik berulang dengan sendirinya pada selang yang berdampingan sepanjang 2π.
3. Grafik y = sin t simetri terhadap titik asal dan y = cos t terhadap sumbu y.
4. Grafik y = sin t sama seperti y = cos t, tetapi digeser $\pi/2$ satuan ke kanan.

3.5. Rangkuman

Fungsi dalam matematika adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan suatu nilai tunggal f(x) dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (codomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut disebut daerah hasil (range).

3.6. Latihan

1) Diketahui : f(x) = sin (x) + 2 cos (2x), maka tentukanlah f(π)

Penyelesaian :

f(π) = sin (π) + 2 cos (2.π)

= sin (180^0) + 2 cos (360^0)

= 0 + 2 = 2

2) Jika fungsi f(x) = (cosec x + sec x)(sin x. cos x), tentukan persamaan dari fungsi tersebut.

Penyelesaian :

$$f(x) = (\cos ec\ \ x + \sec\ \ x)(\sin x.\cos x)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)(\sin x.\cos x)$$

$$= \left(\frac{\cos x}{\sin x.\cos x} + \frac{\sin x}{\sin x.\cos x}\right)(\sin x.\cos x)$$

$$= \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x}\right)(\sin x.\cos x)$$

$$= \sin x + \cos x$$

3). Periksa kebenaran kesamaan-kesamaan berikut : $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ dan $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 4
LIMIT DAN KONTINUITAS : TEOREMA LIMIT DAN LIMIT FUNGSI

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami pengertian dan prinsip dasar limit serta cara menyelesaikan limit fungsi
Sub Pokok Bahasan	:	4.1. Definisi Limit 4.2. Teorema limit 4.3. Limit kiri dan limit kanan 4.4. Limit Fungsi Khusus
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar*

		untuk Perguruan Tinggi", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Di dalam matematika, konsep limit digunakan untuk menjelaskan sifat dari suatu fungsi, saat argumen mendekati ke suatu titik, atau tak hingga; atau sifat dari suatu barisan saat indeks mendekati tak hingga. Limit digunakan dalam kalkulus (dan cabang lainnya dari analisis matematika) untuk mencari turunan dan kekontinyuan.

4.1. Definisi Limit

Definisi Intuitif

Misalkan *y=f(x)* suatu fungsi, *a* dan L bilangan riil sedemikian sehingga :

- Bila *x* dekat *a* tetapi tidak sama dengan *a* ($x \neq a$), *f(x)* dekat ke L
- Bila *x* mendekati *a* tetapi $x \neq a$, maka *f(x)* mendekati L
- Misalkan *f(x)* dapat kita buat sedekat mungkin ke L dengan membuat *x* cukup dekat *a* tetapi tidak sama dengan a
- Maka dapat dikatakan bhw limit *f(x)* bila *x* mendekati *a* adalah L, $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Misalkan **:** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{4}{5}$

Tabel limit fungsi $\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ ditunjukkan pada tabel 4.1.

Tabel 4.1. Tabel limit fungsi f(x)

x	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{4}{5}$
1	0,75
1,5	0,7778
1,9	0,7959
1,999	0,79996
↓	↓
2	0,8
3	0,83333
2,5	0,81818
2,1	0,80392
2,001	0,80004
2	0,8

4.2. Teorema Limit

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. Maka :

1. $\lim\limits_{x \to C} k = k$

2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x).g(x) \right] = \lim\limits_{x \to c} f(x). \lim\limits_{x \to c} g(x)$

7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

8. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x) \right]^n$

9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$ asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan : $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 3\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 2$$

$$= (3.2) - 2 = 4$$

2) Tentukan : $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2x - 2)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 2x - 2) = \lim_{x \to 3} x^2 + 2\lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 2$$

$$= (3)^2 + 2(3) - 2 = 9 + 6 - 2 = 13$$

3) Tentukan : $\lim\limits_{x \to 2} (x - 3)^2$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2} (x-3)^2 = \lim_{x\to 2}(x^2 - 6x + 9)$$

$$= 2^2 - 6(2) + 9 = 1$$

4) Tentukan : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-2}{9x+7}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-2}{9x+7} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(9x+7)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2}{9\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 7}$$

$$= \frac{3(2)-2}{9(2)+7} = \frac{6-2}{18+7} = \frac{4}{25}$$

5) Tentukan : $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{9+x^2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{9+x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(9+x^2)}$$

$$= \sqrt{(9+4^2)} = \sqrt{25} = 5$$

6) Tentukan : $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{(x-4)^2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{(x-4)^2} = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2 - 8x + 16}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to 1}(x^2 - 8x + 16)}$$

$$= \sqrt[3]{1^2 - 8(1) + 16} = \sqrt[3]{9}$$

7) Tentukan : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Penyelesaian :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 - x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

8) Tentukan : $\lim\limits_{x \to 1} (2x+3)(x-2)$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 1} (2x+3)(x-2) = \lim_{x \to 1} (2x+3) . \lim_{x \to 1} (x-2)$$

$$= (2.1+3).(1-2) = 5.(-1) = -5$$

9) Tentukan : $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{(x+n)^3 - x^3}{n}$

Penyelesaian :

$$\lim_{n \to 0} \frac{(x+n)^3 - x^3}{n} = \lim_{n \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 n + 3xn^2 + n^3 - x^3}{n}$$

$$= \lim_{n \to 0} \frac{3x^2 n + 3xn^2 + n^3}{n}$$

$$= \lim_{n \to 0} \left(3x^2 + 3xn + n^2\right)$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

10) Tentukan : $\lim\limits_{n \to 2} \sqrt{n^2 + 10n + 1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{n \to 2} \sqrt{n^2 + 10n + 1} = \sqrt{2^2 + 10(2) + 1}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

11) Tentukan : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + 3x - 2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)(x+3)}{x^2 + 3x - 2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1} (2x-1) . \lim\limits_{x \to 1} (x+3)}{\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + 3x - 2\right)} = \frac{1.4}{2} = 2$$

12) Tentukan : $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 + 3x + 9}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2+3x+9} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}\left(x^2+3x+9\right)}$$

$$= \sqrt[3]{3^2+3(3)+9}$$

$$= \sqrt[3]{27} = 3$$

13) Tentukan : $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{t}-2}{t-4}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{t}-2}{t-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{t}-2}{\left(\sqrt{t}-2\right)\left(\sqrt{t}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\left(\sqrt{t}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

4.3. Limit Kiri dan Limit Kanan

Dalam definisi limit tidak ada batasan mengenai bagaimana x harus mendekati x_o. Kadang-kadang lebih mudah untuk membatasi pendekatan ini. Dengan meninjau x dan x_o sebagai titik-titik pada sumbu real dimana x_o adalah tetap dan x bergerak, maka x dapat mendekati x_o dari kanan atau dari kiri. Untuk mengindikasikan pendekatan ini berturut-turut dengan menuliskan :

Jika x mendekati x_o dari kiri, maka $x \to x_o^{\,-}$

Jika x mendekati x_o dari kanan, maka $x \to x_o^{\,+}$

Secara limit kedua pernyataan diatas ini ditulis sebagai berikut :

$\lim\limits_{x\to a^-} f(a)$ ada, berarti fungsi memiliki limit kiri

$\lim\limits_{x\to a^+} f(a)$ ada, berarti fungsi memiliki limit kanan

$\lim\limits_{x\to a} f(a)$ ada, mengandung arti bahwa keduanya limit kiri dan kanan ada dan sama.

Contoh soal dan penyelesainnya :

Selidiki : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$

Untuk $x \to 0^-$, maka $\frac{1}{x}$ →- ∝

Dan $2^{1/x}$ →0.

Maka : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{3 + 2^{1/x}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3}$

Untuk $x \to 0^+$, maka $\frac{1}{x}$ →+∝

Dan limit kanan, sehingga $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{3 + 2^{1/x}}$ tidak ada. $2^{1/x} \to \propto$.

Maka : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{3 + 2^{1/x}} = \frac{1}{\infty} = 0$

Limit kiri ≠

4.4. Limit Fungsi Khusus

Misalkan f(x) dapat didefinisikan dan bernilai tunggal untuk semua nilai x di sekitar x = x_o dengan pengecualian untuk x = x_o itu sendiri.

Dibawah ini diberikan beberapa limit fungsi yang istimewa, yaitu :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin\ x} = 1$

untuk x kecil maka sin x ≈ x

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Dapat dibuktikan berdasarkan (a),

sebagai berikut :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(\cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\cos x)} = 1.1 = 1$$

e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

Bukti :

Misalkan $x = \frac{1}{y}$, berarti x $\to$ 0 maka y $\to \propto$ sehingga

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y \to \pm\infty}(1+\frac{1}{y})^{y} = e$$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Bukti :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}$$

$$= \ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Bukti :

Misalkan ln (1 + x) = y, maka (1 + x) = e^y

x = e^y – 1, sehingga y $\to$ 0 jika x $\to$ 0. Maka dari (g) :

$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}$ atau dengan mengganti huruf y dengan x diperoleh $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Hitung : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 4x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 4x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\right)\left(\frac{4x}{\tan 4x}\right).\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{2x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x} . \frac{1}{\lim_{4x \to 0} \frac{\tan 4x}{4x}}$$

$$= \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$$

2) Hitung : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{10x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{10x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3) Selesaikan : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x \cos 2x}{4x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x \cos 2x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \ \cos x \ \cos 2x}{4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{4} \frac{\sin x}{x} . \cos x . \cos 2x$$

$$= \frac{2}{4} . 1 . \cos(0) . \cos(2.0) = \frac{1}{2}$$

4) Hitung : $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

Penyelesaian :

Misalkan x = 2y, maka y$\to \propto$ bila x $\to \propto$, sehingga

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{2y}\right)^{2y}$$

$$= \left\{ \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right\}^2 = e^2$$

5) Selesaikan : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 (x/2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \ (x/2)}{x/2} \frac{1}{2} \frac{\sin(x/2)}{x/2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\ (x/2)}{x/2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin(x/2)}{x/2}\,\frac{1}{2}$$

$$= 2.1.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

6) Selesaikan : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - 2\sin 2x}{2\sin 3x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{2\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{2\sin 3x} - \frac{\sin 2x}{2\sin 3x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x}\,\frac{3x}{\sin 3x}.\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\,\frac{3x}{\sin 3x}.\frac{2}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}.1.1.\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}.1.1.\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{6}$$

7) Selesaikan : $\lim_{x\to 0} \left\{\ln(x^2 + 6x + 9) - \ln(x+3)\right\}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 0} \left\{\ln(x^2 + 6x + 9) - \ln(x+3)\right\} = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x^2 + 6x + 9}{x+3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)}\right)$$

$$= \ln\ \left\lfloor \lim_{x\to 0}(x+3) \right\rfloor = \ln(3)$$

8) Hitung : $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+7}\right)^{5x^2+1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+7}\right)^{5x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+7-2}{x^2+7}\right)^{5x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2+7}\right)^{\left(\frac{x^2+7}{-2}\right)\left(\frac{-2}{x^2+7}\right)\left(5x^2+1\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-10x^{2-2}}{x^2+7}}$$

$$= e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

9) Hitung : $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+a).\sin\frac{1}{2}(x-a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} 2\cos\tfrac{1}{2}(x+a).\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(a+a).\left[\tfrac{1}{2}\right] = \cos a$$

Jika menentukan limit dengan hanya menggunakan tabel serta grafik memerlukan waktu dan nilai pendekatannya kurang tepat. Maka untuk itu diberikan beberapa macam metode untuk menentukan limit.

4.5. Rangkuman

Limit dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tersebut. Limit hanya merupakan nilai pendekatan, bukan nilai sebenarnya.

4.6. Latihan

Selesaikanlah soal-soal limit dibawah ini :

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin x}{\sin(3x)}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(x/4)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos x}}$

f) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{5n-1}$

g) $\lim\limits_{y \to 2} \left(\frac{2y^2+8y}{y+4}\right)^{1/3}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \{\ln(x^2+4x-5) - \ln(x-1)\}$

i) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+10}{n+5}\right)^{3n-1}$

j) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{5n-1}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5\sin(x+1)}{\tan(x+1)}$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 5
LIMIT DAN KONTINUITAS : KONTINUITAS DAN ATURAN L'HOPITAL

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami pengertian dan prinsip dasar Limit dan Kontinuitas
Sub Pokok Bahasan	:	5.1. Metode Penyelesaian Limit 5.2. Kontinuitas 5.3. Aturan L'Hopital
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk*

		Perguruan Tinggi", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

5.1. Metode Penyelesain Limit

Ada beberapa bentuk limit jika diselesaikan dengan suatu metode akan menghasilkan nilai $\frac{0}{0}$. Banyak yang menganggap bahwa ini adalah hasil akhir nilainya, padahal pada beberapa kasus, bentuk $\frac{0}{0}$ bukan merupakan nilai limit. Diperlukan metode yang tepat untuk menentukan nilai limit fungsi di suatu titik.

5.1.1. Menentukan Limit Dengan Memfaktorkan

Umumnya metode ini digunakan Untuk menyelesaikan limit aljabar pada fungsi pecahan, jika dengan metode subsitusi nilai limit tak terdefinisi.

Langkah-langkah yang digunakan adalah menyederhanakan bentuk pecahan tersebut dengan menentukan faktor persekutuan antara pembilang dan penyebut.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Selesaikanlah soal-soal limit berikut ini :

1) Hitung : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

2) Selesaikan : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 3}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{4}{3}$$

3) Hitung : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{(x-2)}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}(2x+3)$$

$$= 2(2) + 3 = 7$$

4) Selesaikanlah soal limit berikut : $\lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+2y-3)}{y^2-2y+1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+2y-3)}{y^2-2y+1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y+3)(y-1)}{(y-1)(y-1)}$$

$$= \lim_{y\to 1}(y+3)$$

$$= 1 + 3 = 4$$

5) Selesaikan : $\lim_{x\to 10} \frac{(x-10)}{(x^2+30x-400)}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 10} \frac{(x-10)}{(x^2+30x-400)} = \lim_{x\to 10} \frac{(x-10)}{(x-10)(x+40)}$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{1}{(x+40)}$$

$$= \frac{1}{10+40} = \frac{1}{50}$$

6) Selesaikan : $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} (x+3)(x+1)$$

$$= (-2+3)(-2+1)$$

$$= -1$$

5.1.2. Menentukan Limit Dengan Merasionalkan Bentuk Akar

Agar pecahan dapat disederhanakan pembilang dan penyebut dikalikan dengan akar sekawannya.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Selesaikan : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{x-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{8-4x}{(x-2)(3+\sqrt{4x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-4(x-2)}{(x-2)(3+\sqrt{4x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-4}{3+\sqrt{4x+1}} = -\frac{2}{3}$$

2) Selesaikan : $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} \, x \, \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4}}{\sqrt{x}+\sqrt{4}}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+\sqrt{4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

3) Hitung : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}} \cdot \frac{3+\sqrt{9+x}}{3+\sqrt{9+x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(2x-5)(3+\sqrt{9+x})}{-x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[-(2x-5)(3+\sqrt{9+x}\right]$$

$$= -(-5)(3+\sqrt{9})$$

$$= 30$$

4) Hitung : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{1-x^2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{1-x^2}.\frac{\sqrt{x^2+3}+(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)\left(\sqrt{x^2+3+x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(1+x)\left(\sqrt{x^2+3+x+1}\right)}=\frac{1}{4}$$

5) Selesaikan : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(1+1+1)^2}=\frac{1}{9}$$

6) Selesaikan : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{3-\sqrt{2x+9}}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3-\sqrt{2x+9}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{3-\sqrt{2x+9}}.\frac{3+\sqrt{2x+9}}{3+\sqrt{2x+9}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\cos x\left(3+\sqrt{2x+9}\right)}{-1}$$

$$=1.\frac{\cos(0)\left(3+\sqrt{2(0)+9}\right)}{-1}$$

$$=1.\frac{1(3+3)}{-1}=-6$$

5.1.3. Menentukan Limit dengan Membagi Pembilang dan Penyebut dengan Variabel Pangkat Tertinggi.

Metode ini digunakan untuk jenis fungsi pecahan dengan x mendekati tak hingga ($x \to \sim$), dilakukan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi.

Dimana : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Hitung : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 7}{3 - 6x^2 - 2x^3}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 7}{3 - 6x^2 - 2x^3} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3/x^3 - 4x^2/x^3 + 7/x^3}{3/x^3 - 6x^2/x^3 - 2x^3/x^3} \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1 - 4/x + 7/x^3}{3/x^3 - 6/x - 2} \right] = -\tfrac{1}{2}$$

2) Hitung : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3/x^3}{x^2/x^3 + 1/x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x \;\; + 1/x^3}$$

$$= \infty (\text{tak ada limit})$$

3) Hitung : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^4 + 3x^3 + 4}{6x^4 + x - 5}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4 + 3x^3 + 4}{6x^4 + x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-2x^4/x^4\right) + \left(3x^3/x^4\right) + \left(4/x^4\right)}{\left(6x^4/x^4\right) + \left(x/x^4\right) - \left(5/x^4\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2 + \left(3/x\right) + \left(4/x^4\right)}{6 + \left(1/x^3\right) - \left(5/x^4\right)}$$

$$= \frac{-2 + 0 + 0}{6 + 0 - 0} = -\frac{1}{3}$$

4) Hitung : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4\sqrt{x^7}+2x^5+8}{8x^5-1}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4\sqrt{x^7}+2x^5+8}{8x^5-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\left(x^{7/2}/x^5\right)+\left(2x^5/x^5\right)+\left(8/x^5\right)}{\left(8x^5/x^5\right)-\left(1/x^5\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(4/x^{3/2}\right)+2+\left(8/x^5\right)}{8-\left(1/x^5\right)}$$

$$= \frac{0+2+0}{8-0} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

5) Selesaikanlah soal limit berikut : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(8+10x)(4-2x)}{(4+2x)(2-2x)}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(8+10x)(4-2x)}{(4+2x)(2-2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-20x^2+24x+32}{-4x^2-4x+8}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-20x^2/x^2\right)+\left(24x/x^2\right)+\left(32/x^2\right)}{\left(-4x^2/x^2\right)-\left(4x/x^2\right)+\left(8/x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-20+\left(24/x\right)+\left(32/x^2\right)}{-4-\left(4/x\right)+\left(8/x^2\right)}$$

$$= \frac{-20+0+0}{-4-0+0} = 5$$

6) Selesaikanlah : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x-10}{4x^2+8x+10}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x-10}{4x^2+8x+10} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(6x/x^2\right)-\left(10/x^2\right)}{\left(4x^2/x^2\right)+\left(8x/x^2\right)+\left(10/x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(6/x\right)-\left(10/x^2\right)}{4+\left(8/x\right)+\left(10/x^2\right)}$$

$$= \frac{0-0}{4+0+0} = \frac{0}{4} = \infty$$

7) Selesaikanlah : $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{16x^3+2x+6}{-4x^3-4x^2-6}\right]$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{16x^3+2x+6}{-4x^3-4x^2-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{16x^3}{x^3}\right)+\left(\frac{2x}{x^3}\right)+\left(\frac{6}{x^3}\right)}{\left(-\frac{4x^3}{x^3}\right)-\left(\frac{4x^2}{x^3}\right)-\left(\frac{6}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16+\left(\frac{2}{x^2}\right)+\left(\frac{6}{x^3}\right)}{-4-\left(\frac{4}{x}\right)-\left(\frac{6}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{16+0+0}{-4-0-0}=-4$$

8) Selesaikanlah : $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{x(x+2)}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right\}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x(x+2)}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x(x+2)(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3+x^2+2x}{x^3+x^2+x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\left(\frac{x^3}{x^3}\right)+\left(\frac{x^2}{x^3}\right)+\left(\frac{2x}{x^3}\right)}{\left(\frac{x^3}{x^3}\right)+\left(\frac{x^2}{x^3}\right)+\left(\frac{x}{x^3}\right)+\left(\frac{1}{x^3}\right)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^3}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1+0+0}{1+0+0+0}=1$$

9) Selesaikanlah : $\lim\limits_{y\to\infty}\left[\dfrac{5y^2+4y}{3y-5}\right]$

Penyelesaian :

$$\lim_{y\to\infty}\frac{5y^2+4y}{3y-5}=\lim_{y\to\infty}\left\{\frac{\left(\frac{5y^2}{y^2}\right)+\left(\frac{4y}{y^2}\right)}{\left(\frac{3y}{y^2}\right)-\left(\frac{5}{y^2}\right)}\right\}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \left\{ \frac{5 + \left(\frac{4}{y}\right)}{\left(\frac{3}{y}\right) - \left(\frac{5}{y^2}\right)} \right\}$$

$$= \frac{5+0}{0-0} = \frac{5}{0} = \infty$$

5.2. Kontinuitas dan Diskontinuitas Fungsi

Definisi :

Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu (sinambung) di x = x_o jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Dari definisi terlihat ada 3 (tiga) syarat sebuah fungsi f(x) dikatakan kontinu di x = x_o yaitu:

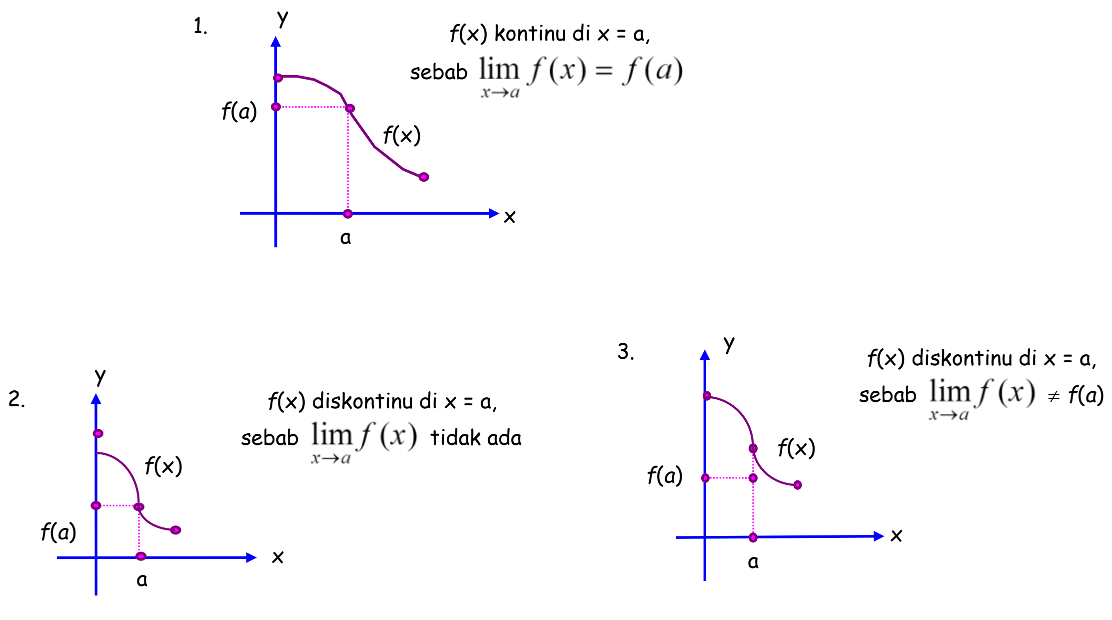
(1) $f(x_o)$ terdefinisi (ada).

(2) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ terdefinisi ada,

(3) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

Apabila satu di antara ketiga syarat itu tidak dipenuhi, maka fungsi f(x) diskontinu (tak sinambung) di x = a.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 5.1. Fungsi kontinu dan diskontinu

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di $x = 1$

Penyelesaian :

a) $f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow$ f(1) terdefinisi

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + x - 3\right) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ terdefinisi

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ Jadi fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di x =1.

2) Selidiki apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu di x = 3

Penyelesaian :

$f(3) = \dfrac{3^2 - 9}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$ (tidak terdefinisi)

Karena f(3) tak terdefinisi, maka f(x) diskontinu di x = 3

3) Selidiki apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{untuk } x \neq 2 \\ 4, & \text{untuk } x = 2 \end{cases}$ kontinu di x = 2

Penyelesaian :

a) f(1) = 4 (terdefinisi)

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 + x + 1\right) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

(terdefinisi)

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, berarti f(x) diskontinu di x = 1

Misal :

f(x) = x^2 + 1 kontinu di x = 2, karena : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$

Persyaratan ini mengandung arti bahwa fungsi hanya mungkin kontinu pada titik dalam daerah definisinya.

Sebuah fungsi yang kontinu di setiap titik dalam suatu interval dikatakan kontinu dalam interval tersebut.

Sebuah fungsi f(x) dikatakan diskontinu pada x = x_o jika satu atau lebih syarat untuk kontinuitas tidak berlaku dititik tersebut.

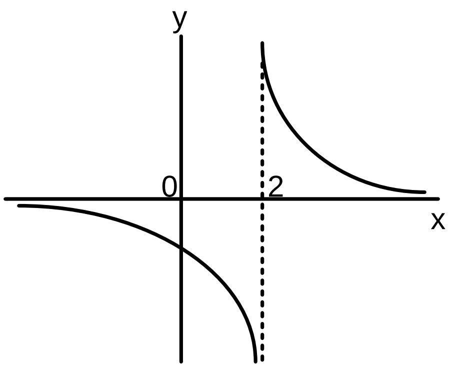
Contoh diskontinuitas :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ adalah diskontinu pada x = 2, karena :

(i) f(2) tidak terdefinisikan (mempunyai penyebut nol)

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ tidak ada (sama dengan ∞)

Fungsi ini kontinu dimana-mana kecuali pada x=2 dimana fungsi tersebut dikatakan mempunyai diskontinuitas yang berhingga.



5.3. Aturan L'Hopital

Jika $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$ dan $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = B$, dimana A dan B keduanya nol atau keduanya tak terhingga, maka $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ seringkali tak tentu dalam bentuk berturut-turut 0/0 atau ∞/∞. Teorema berikut yang disebut L'Hopital mempermudah perhitungan limit-limit semacam ini.

1. Jika f(x) dan g(x) dapat didiferensiasi dalam interval (a, b) kecuali mungkin pada titik x_o dalam interval ini, dan jika $g'(x) \neq 0$ untuk $x \neq x_o$, maka

   $$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Jika $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$ dan $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \infty$, maka persamaan $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ juga berlaku.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Hitunglah : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} \rightarrow \text{ memiliki "bentuk tak tentu" } 0/0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

2) Hitunglah : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+4}{4x^2+3x-5}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+4}{4x^2+3x-5} \rightarrow \text{ memiliki "bentuk tak tentu" } \infty/\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+4}{4x^2+3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{8x+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

3) Hitunglah : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x^2+3x-10}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^3-4x}{x^2+3x-10}\right\} \rightarrow \text{ memiliki "bentuk tak tentu" } 0/0$$

$$\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^3-4x}{x^2+3x-10}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4}{2x+3}$$

$$=\frac{3(2)^2-4}{2(2)+3}=\frac{8}{7}$$

Contoh-contoh soal yang diselesaikan :

1) Hitunglah :

a) $\lim\limits_{x\to 2}5x=5\lim\limits_{x\to 2}x=5.2=10$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+1)=4-8+1=-3$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\frac{x-2}{x+2}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+2)}=\frac{1}{5}$

d) $\lim_{x\to 4}\sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25-x^2)}$

$= \sqrt{9} = 3$

2) Hitunglah :

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x+3)(x-4)}$

$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}$

$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}$

c) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right]\left[\frac{(3+\sqrt{x^2+5})}{(3+\sqrt{x^2+5})}\right]$

$= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$

$= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = 6$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}$

$= \lim_{x\to 4}\frac{x+2}{x-1} = \infty;$ tidak ada limit

3) Hitung soal-soal dibawah ini, mula-mula dengan membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari x yang ada, kemudian gunakan $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x}{9+7/x}$

$= \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{6-2/x+1/x^2}{6-3/x+1/x^2}$

$= \frac{6+0+0}{6-0-0} = 1$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^3}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4}{1/x + 5/x^2} = \infty$; tidak ada limit

4) Diketahui f(x) terdefinisi oleh :

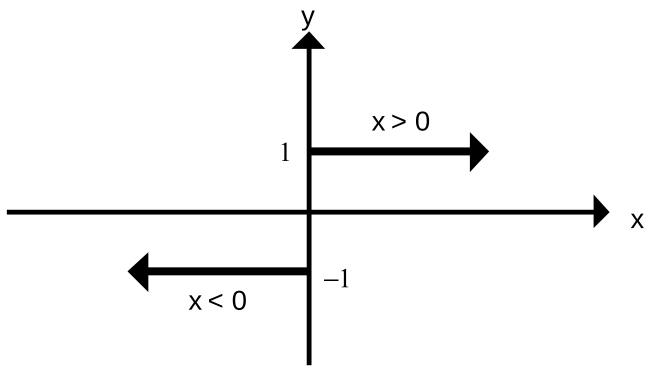
$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ jika } x < 0 \\ 0 \text{ jika } x = 0 \\ 1 \text{ jika } x > 0 \end{cases}$$

Selidikilah limit dari fungsi tersebut.

Penyelesaian :

Syarat suatu limit dikatakan ada, jika limit mempunyai limit kiri dan limit kanan dan mempunyai harga sama.

Grafik dari f(x) diatas adalah :



Limit kiri di x = 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

Limit kanan di x = 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1$$

Limit kiri $\neq$ limit kanan, maka dapat disimpulkan bahwa :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \text{tidak ada}$$

5) Hitunglah :

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{4x} 4$

$$= 4 \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{4x} = 4(1) = 4$$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{x}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}3\right)\lim\limits_{x\to0}{}^{(x+1)}$

$= (1x3)^1 = 3$

6) Selidiki $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ diskontinu dititik x sama dengan ?

Penyelesaian :

(a) $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi)

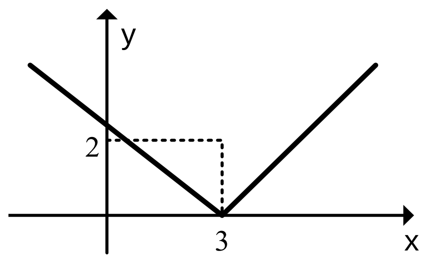
(b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to2}(x+2) = 2+2 = 4$

Maka fungsi diskontinu dititik x = 2

7) Selidiki kontinuitas fungsi $f(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{jika } x \neq 3 \\ 2 & \text{jika } x = 3 \end{cases}$

Penyelesaian :



a) f(3) = 2

b) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-}|x-3| = 0$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+}|x-3| = 0$

Limit kiri = limit kanan $\Rightarrow$ maka $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 0$

tetapi $\lim\limits_{x\to3} f(x) \neq f(3)$

Jadi fungsi diskontinu dititik x = 3

5.4. Rangkuman

Limit digunakan untuk menyatakan sesuatu yang nilainya mendekati nilai tertentu. Jika suatu fungsi tidak terdefinisi untuk titik tertentu, tetapi kita masih bisa mencari nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila titik tertentu makin didekati yaitu dengan limit.

5.5. Latihan

1. Selesaikan soal-soal limit berikut ini :

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x-4)$

c) $\lim\limits_{w\to -2}\dfrac{(w+2)(w^2-w-6)}{w^2+4w+4}$

d) $\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{u^2-2u+1}{u^2+4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n^3-25n+6}{-2n^3+2n^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}\right]$

i) $\lim\limits_{y\to 2}\left(\dfrac{4y^3+8y}{y+4}\right)^{1/3}$

j) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$

l) $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y^4-4y^3-y^2-1}{5y^4+10}$

2. Cari limit-limit tersebut dibawah ini, jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-1$

a) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{g(x)}[f(x)+3]$

3. Hitung :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{\sin 3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2\sin x\cos x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/4)}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+a)+\sin(x-a)}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin(x+1)}{\tan(x+1)}$

4. Tentukan :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(9x+1)-\ln(3x+1)]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(x^2+4x-5)-\ln(x-1)\}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+1}\right)^{4x}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+10}{n+5}\right)^{3n-1}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{5n-1}$

5. Cari tiap limit kanan dan limit kiri atau nyatakan bahwa itu tidak ada.

a) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\sqrt{9-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{4+4x}$

6. Tentukan titik-titik diskontinu dan jenis diskontinuitas dari fungsi-fungsi :

a) $f(x)=\frac{x^3-27}{x^3-9}$

b) $f(x)=\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

c) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\frac{x^4-16}{x^2-4}$

7. Diberikan suatu fungsi : $\mathrm{f(x)}=\begin{cases}\frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} & \text{jika } x\neq1\\ 2 & \text{jika } x=1\end{cases}$

Selidiki kekontinuan fungsi tersebut.

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 6
TURUNAN (DIFFERENSIAL) : MENENTUKAN TURUNAN FUNGSI DAN ATURAN DASAR TURUNAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa mampu memahami prinsip dasar dan aturan dasar turunan
Sub Pokok Bahasan	:	6.1. Definisi Diferensial 6.2. Menentukan Turunan Fungsi 6.2.1. Aturan Dasar Turunan 6.2.2. Jika y= f(x) Merupakan Fungsi Trigonometri 6.2.3. Jika y = f(x) Merupakan Fungsi Logaritma 6.2.4. Jika y = f(x) Merupakan suatu Fungsi Eksponen 6.2.5. Jika y = f(x) suatu Fungsi Siklometri
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999.

		2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Turunan (diferensial) dipakai sebagai sebuah alat untuk menyelesaikan berbagai permasalah yang dijumpai di dalam bidang geometri dan mekanika. Turunan merupakan salah satu topik penting dalam Kalkulus.

Konsep turunan fungsi secara universal atau menyeluruh banyak sekali dimanfaatkan di dalam berbagai bidang keilmuan. Misalnya, dalam bidang ekonomi : yang dipakai guna menghitung berupa, biaya total atau total penerimaan. Pada bidang biologi: dipakai untuk menghitung laju pertumbuhan organisme. Pada bidang fisika : di pakai untuk menghitung kepadatan kawat. Pada bidang kimia: dipakai untuk menghitung laju pemisahan. Serta pada bidang geografi dan juga sosiologi: yang dipakai untuk menghitung laju pertumbuhan penduduk dan lain-lain.

6.1. Definisi Diferensial

Turunan (*derivative*) suatu fungsi y = f(x) terhadap x = x_o didefinisikan sebagai

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

asalkan limitnya ada. Limit ini juga disebut laju perubahan sesaat (atau mudahnya, laju perubahan) dari y terhadap x pada x = x_o .

Secara umum, turunan akan menyatakan bagaimanakah sebuah besaran berubah akibat adanya perubahan besaran yang lainnya.

Sebagai contoh : turunan dari posisi suatu benda yang kemudian bergerak terhadap waktu merupakan kecepatan sesaat oleh objek tersebut.

Proses dalam menemukan suatu turunan disebut sebagai diferensiasi. Serta kebalikan dari suatu turunan disebut seabgai Anti Turunan.

Contoh :

Cari turunan y = f(x) = x^2 + 3x terhadap x pada x = x_0. Gunakan ini untuk nilai turunan pada x_o = 2.

Penyelesaian :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left((x+h)^2 + 3(x+h) - (x^2 + 3x)\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left((x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h) - (x^2 + 3x)\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - x^2 - 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h + 3) = 2x + 3$$

Maka : $f'(x) = 2x + 3$

Pada x_o = 2, nilai turunan adalah = 2.2 + 3 = 7

6.2. Menentukan Turunan Fungsi

Turunan bisa ditentukan tanpa adanya proses limit. Untuk kebutuhan ini dirancang teorema atau pernyataan mengenai turunan dasar, turunan dari operasi aljabar pada dua fungsi, aturan rantai untuk turunan fungsi komposisi, dan juga turunan fungsi invers.

Dibawah ini diberikan rumusan dasar dari suatu turunan (*derivative*) untuk fungsi-fungsi elementer.

6.2.1. Aturan Dasar Turunan

Beberapa aturan dasar dari turunan sebagai berikut :

a) y = f(x) = x^n, maka $y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

b) y = f(x) suatu fungsi konstanta maka $y' = \frac{dy}{dx} = 0$

c) Aturan kelipatan konstanta berlaku jika y = k f(x) maka $y' = \frac{dy}{dx} = k.f'(x)$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi dibawah ini :

1) Diketahui : $y = f(x) = x^3 + 6$

Penyelesaian :

$$y = f(x) = 2x^3 + 6$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(2x^3 + 6)}{dx} = 6x^2$$

2) Diketahui : $y = f(x) = 8$

Penyelesaian :

$$y = f(x) = 8$$
$$f^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = 0$$

3) Diketahui : $y = f(x) = 3x^4$

Penyelesaian :

$$y = f(x) = 3x^4$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3.\frac{d(x^4)}{dx}$$

$$= 3(4x^3) = 12x^3$$

4) Diketahui : $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$

Penyelesaian :

$$y = f(x) = (x^2 + 6x + 3)^{1/2}$$

$$f(x)' = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}.\frac{d}{dx}\left(x^2 + 6x + 3\right)$$

$$= \frac{x+3}{2\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

5) Diketahui : $f(t) = \frac{2}{\sqrt{7t}} - \frac{4}{\sqrt[3]{t}}$

Penyelesaian :

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{4}{\sqrt[3]{t}} = 2t^{-1/2} - 4t^{-1/3}$$

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = -t^{-3/2} + \frac{4}{3}t^{-4/3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t^3}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{t^4}}$$

6.2.2. Jika y= f(x) Merupakan Fungsi Trigonometri

Jika y = f(x) merupakan suatu fungsi trigonometri, maka berlaku :

a) y = sin x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$

b) y = cos x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = -\sin x$

c) y = tg x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

d) y = ctg x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = -\mathrm{cosec}^2 x$

e) y = sec x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \sec x.\mathrm{tg}\, x$

f) y = cosec x, maka y′ = $\frac{dy}{dx}$ = -cosec x ctg x

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi dibawah ini :

1) Diketahui : y = cos 2x

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sin 2x.2$$

$$= -2\sin 2x.$$

2] Diketahui : y = tan 5x

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sec^2 5x.(5x)'$$

$$= 5\sec^2 5x$$

3] Diketahui : $y = -2\sin\left(\sqrt{5x+6}\right)$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = -2\cos\left(\sqrt{5x+6}\right)\left(\sqrt{5x+6}\right)'$$

$$= -2\cos\left(\sqrt{5x+6}\right).\frac{1}{2}(5x+6)^{-1/2}.5$$

$$= \frac{-5\cos\left(\sqrt{5x+6}\right)}{\sqrt{5x+6}}$$

4) Diketahui : y = sin (x^3 - 4)

Penyelesaian:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos(x^3-4).(x^3-4)'$$

$$= \cos(x^3-4).3x^2 = 3x^2\cos(x^3-4)$$

5) Diketahui : y = -3 cos(x^2 – 2)

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = -3(-\sin(x^2-2)).(x^2-2)'$$

$$= 3\sin(x^2-2).2x = (6x)\sin(x^2-2)$$

6.2.3. Jika y = f(x) Merupakan Fungsi Logaritma

Jika y = f(x) merupakan suatu fungsi Logaritma, maka berlaku :

a) y = ${}^{g}\log x$, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln g}$

b) y = ln x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

contoh soal dan penyelesaiannya :

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi dibawah ini :

1. Diketahui : $y = \ln x^3$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}(x^3)'$$

$$= \frac{1}{x^3}.3x^2 = \frac{3}{x}$$

2. Diketahui : $y = f(x) = {}^4\log x$

Penyelesaian :

$$y = f(x) = \frac{\ln x}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}.\ln x$$

$$y' = \frac{1}{\ln 4}.\frac{1}{x}$$

3. Diketahui : $y = f(x) = \ln\left(\cos^2(2x)\right)$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2(2x)}\left(\cos^2(2x)\right)'$$

$$= \frac{1}{\cos^2(2x)}2\cos(2x)(-\sin(2x).2$$

$$= \frac{-4\sin(2x)\cos(2x)}{\cos^2(2x)}$$

$$= \frac{4\sin(2x)}{\cos(2x)} = 4\mathrm{tag}(2x)$$

4. Diketahui : $y = -2\ln(x+6)^2$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x+6)^2}\left((x+6)^2\right)'$$

$$= \frac{-2}{(x+6)^2}.2(x+6) = \frac{-4}{(x+6)}$$

5. Diketahui : $y = f(x) = {}^2\log\left(x^2 - 9\right)$

Penyelesaian :

$$y = \frac{\ln\left(x^2-9\right)}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.\ln\left(x^2-9\right)$$

$$y' = \frac{1}{\ln 2}.\frac{1}{\left(x^2-9\right)}.(2x)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}.\frac{2x}{\left(x^2-9\right)}$$

6. Diketahui : $y = f(x) = 2\ln^2 e^{3x^2}$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2(2\ln e^{3x^2}).\frac{1}{e^{3x^2}}.e^{3x^2}.6x$$

$$= \frac{24x.e^{3x^2}\ln e^{3x^2}}{e^{3x^2}} = 24x.\ln e^{3x^2}$$

6.2.4. Jika y = f(x) Merupakan suatu Fungsi Eksponen

Jika y = f(x) merupakan suatu fungsi eksponen, maka berlaku :

a) $y = a^x$, maka $y' = \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

b) $y = e^x$, maka $y' = \frac{dy}{dx} = e^x$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi dibawah ini:

1. Diketahui : y = 5^x

   Penyelesaian :

   $$y = \frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5$$

2. Diketahui : y = e^{4x}

   Penyesaian :

   $$y = \frac{dy}{dx} = e^{4x}(4x)'$$

   $$= e^{4x}.4 = 4e^{4x}$$

3. Diketahui : $y = 4^{2x^2}$

   Penyelesaian :

   $$y' = 4^{2x^2} \ln 4.(4x)$$

   $$= 4^{2x^2} 4x \ln 4$$

4. Diketahui : $y = e^{(2x^3+5)}$

   Penyelesaian :

   $$y = \frac{dy}{dx} = e^{(2x^3+5)}.(2x^3+5)'$$

   $$= e^{(2x^3+5)}.6x^2 = 6x^2 e^{(2x^3+5)}$$

6.2.5. Jika y = f(x) suatu Fungsi Siklometri

Jika y = f(x) merupakan suatu fungsi siklometri, maka berlaku :

a) y = arc sin x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) y = arc cos x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) y = arc tg x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

d) y = arc ctg x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$

e) y = arc sec x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

f) y = arc cosec x, maka $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Diketahui : y = $\arcsin(x^2+5)$

   Penyelesaian :

   $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+5)^2}}.2x$$

   $$= \frac{2x}{\sqrt{-(x^4+10x^2+26)}}$$

2. Diketahui : y = $\arccos(3x)^2$

   Penyelesaian :

   $$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}}.18x$$

   $$= \frac{-18x}{\sqrt{1-9x^2}}$$

3. Diketahui : $y = \arcsin(x/2)$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2/4)}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

4. Diketahui : $y = \text{arc } \cos(7x-6)^5$

Penyelesaian :

Misalkan : $u = (7x-6)^5$, maka : $\frac{du}{dx} = 5(7x-6)^4.7 = 35(7x-6)^4$

Sehingga : $y = arc\ \cos u$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left((7x-6)^5\right)^2}}.35(7x-6)^4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{35(7x-6)^4}{\sqrt{1-(7x-6)^{10}}}$$

5. Diketahui : $y = \arctan(x^2)$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2}.2x$$

$$= \frac{2x}{1+x^4}$$

6.3. Rangkuman

Turunan merupakan salah satu topik penting dalam kalkulus. Secara umum, turunan akan menyatakan bagaimanakah sebuah besaran berubah akibat adanya perubahan besaran (variabel) yang lainnya.

6.4. Latihan

Tentukanlah turunan dari fungsi-fungsi berikkut ini :

a. $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

b. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c. $r = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

d. $y = \dfrac{4}{2x^3}$

e. $f(x) = x\sqrt{3 - 2x^2}$

f. $y = \cos(1 - x^2)$

g. $y = \ln \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

h. $y = \arcsin \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

PERTEMUAN 7
TURUNAN (DIFFERENSIAL) : TURUNAN FUNGSI BERSUSUN, TURUNAN FUNGSI INVERS DAN TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami prinsip dasar turunan dan penggunaannya
Sub Pokok Bahasan	:	7.1. Turunan fungsi bersusun 7.2. Turunan fungsi implisit 7.3. Turunan Fungsi invers
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk*

		Perguruan Tinggi", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

7.1. Aturan Rantai untuk Fungsi Bersusun

Untuk fungsi-fungsi yang berbentuk rumit, dimana y adalah fungsi dari u (atau v), u dan v merupakan fungsi dari x, turunannya dicari dengan mengembalikannya ke rumus dasar.

Cara pengembaliannya sebagai berikut :

1. Bila berbentuk $y = \lambda u$, maka $y' = \lambda\ (u)'$, λ bilangan/konstanta.
2. Bila berbentuk $y = u \pm v$, maka $y' = u' \pm v'$.
3. Bila berbentuk $y = uv$, maka $y' = u'v + uv'$
4. Bila berbentuk $y = u.v.w$, maka $y' = u.v.w' + u.w.v' + v.w.u'$
5. Bila berbentuk $y = \frac{u}{v}$, maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut ini :

1) Diketahui : $y = f(x) = 6x^4 - 3x^2 - 8$

Penyelesaian :

$$f'(x) = 6\frac{d}{dx}\left(x^4\right) - 3\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6\left(4x^3\right) - 3(2x) - 0$$

$$= 24x^3 - 6x$$

2) Diketahui : $y = f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x^2 - 4}$

Penyelesaian :

Diselesaikan dengan aturan $y = u \pm v$, maka $y' = u' \pm v'$.

$$y = f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x^2 - 4}$$

$$= x^3 - 2x^{-2/3} + (x^2 - 4)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(2x^{-2/3}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^2 - 4\right)^{1/2}$$

$$= 3x^2 + \frac{4}{3}x^{-5/3} + \frac{1}{2}(x^2 - 4)^{-1/2}.2x$$

$$= 3x^2 + \frac{4}{3\ \sqrt[3]{x^5}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}}$$

3) Diketahui : $y = f(x) = (x^3 + 3x)(x + 4)$

Penyelesaian :

Diselesaikan dengan aturan : y = u.v, maka y′ = u′v + uv′

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x^3 + 3x)'(x + 4) + (x^3 + 3x)(x + 4)'$$

$$= (3x^2 + 3)(x + 4) + (x^3 + 3x)$$

$$= 4x^3 + 12x^2 + 6x + 12$$

4) Diketahui : $y = f(x) = \frac{(x+1)}{x^2}$

Penyelesaian :

Diselesaikan dengan aturan : $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)'(x^2) - (x^2)'(x+1)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-(x+2)}{x^3}$$

5) Diketahui : $y = f(x) = \left(2x^3 - 4x + 7\right)^2$

Penyelesaian :

$$y' = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 4x + 7\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(2x^3 - 4x + 7\right)\left(6x^2 - 4\right)$$

$$= \left(2x^3 - 4x + 7\right)\left(12x^2 - 8\right)$$

$$= 24x^5 - 16x^3 - 48x^3 + 32x + 84x^2 - 56$$

$$= 24x^5 - 64x^3 + 84x^2 + 32x - 56$$

6) Diketahui : $y = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 - 5x + 6}$

Penyelesaian :

Diselesaikan dengan aturan : $y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(2x^2+3x-4\right)'(x^2-5x+6)-(x^2-5x+6)'(2x^2+3x-4)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

$$= \frac{(4x+3)(x^2-5x+6)-(2x-5)(2x^2+3x-4)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4x^3-20x^2+24x+3x^2-15x+18\right)-\left(4x^3+6x^2-8x-10x^2-15x+20\right)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

$$= \frac{-13x^2+32x+38}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

7) Diketahui : $y = f(x) = xe^{2x}$

penyelesaian :

Diselesaikan dengan aturan : y = u.v, maka y′ = u′v + uv′

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x)'(e^{2x}) + (e^{2x})'(x)$$

$$= e^{2x} + e^{2x}.2x$$

$$= e^{2x}(1+2x)$$

8) Diketahui : $y = \ln^3\left(e^{(3x^2+4)}\right)$

Penyelesaian :

$$y' = 3\ln^2\left(e^{(3x^2+4)}\right)\left(\frac{1}{e^{3x^2+4}}\right)\left(e^{3x^2+4}\right)(6x)$$

$$= 18x.\ln^2\left(e^{3x^2+4}\right)$$

9) Diketahui : $z = f(x) = \sin(e^{5x})$

Penyelesaian :

$$z' = \frac{dz}{dx} = \cos(e^{5x}).(e^{5x})'$$

$$= \cos(e^{5x}).(e^{5x}).5$$

$$= 5e^{5x}\cos(e^{5x})$$

10) Diketahui : $y = \sin^2 (4x^2 + 3x)^3$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2\sin(4x^2+3x)^3.\cos(4x^2+3x)^3.3(4x^2+3x)^2(8x+3)$$

$$= (48x+18)(4x^2+3x)^2\sin(4x^2+3x)^3.\cos(4x^2+3x)^3$$

7.2. Turunan dari Fungsi-fungsi Invers

Jika $y = f(x)$ kontinu dan monoton naik (atau turun) pada interval $a \le x \le b$, maka terdapat suatu fungsi invers $x = f^{-1}(y)$ yang kontinu juga.

Berlaku : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan turunan fungsi invers dari fungsi : $f(x) = y = 2x - 3$

Penyelesaian :

Fungsi inversnya $f^{-1}(y) = ½\, y + 1\, ½$

Sehingga disapat : $\dfrac{dy}{dx} = 2$ dan $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}$

2) Tentukan turunan fungsi invers dari fungsi : $y = x^3$

Penyelesaian :

Fungsi inversnya : $x = y^{1/3}$ dan $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{(3x^2)}$

$$= \frac{1}{(3y^{2/3})} = \frac{y^{-2/3}}{3}$$

Maka didapat : $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 = 0$, pada x = 0, pada titik mana y = 0 :

$\dfrac{dx}{dy}$ pada titik tersebut tidak ada.

3) Tentukan turunan fungsi invers dari fungsi : $y = x^2 + 2$

Penyelesaian :

Fungsi invers dari fungsi adalah : $x^2 = y - 2 \rightarrow x = \sqrt{y-2}$

Maka : $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(y-2)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$

Atau dari : y = x^2 +2

Didapatkan $\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x}$ dimana : $x = \sqrt{y-2}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y-2}}$$

7.3. Turunan Fungsi Implisit

Untuk menghitung turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit f(x,y) = 0, kita memandang tiap-tiap suku sebagai suatu fungsi dari x, kemudian menurunkan suku demi suku. Misalkan untuk fungsi implisit $x^2 + xy + x^3 = 0$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'$$

Untuk suku y^3, misalkan y^3 = u, maka $u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}.\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx} = 3y^2y'$

Jadi $(y^3)' = 3y^2y'$. Ruas kanan $(0)'$ = 0. Maka turunan pertama dari $x^2 + xy + x^3 = 0$ adalah 2x + y + xy′ + 3y²y′ = 0 atau (x + 3 y^2)$y' = -2x - y$, berarti : $y' = \frac{(-2x-y)}{(x+3y^2)}$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan y ′, bila diketahui : $x + \cos x - e^y + xy^2 = 0$

   Penyelesaian :

   $x + \cos x - e^y + xy^2 = 0$, diturunkan menjadi :

   1 – sin x - e^yy′ + y^2 + 2xy y′ = 0 → (-e^y + 2xy)y′ = -1 + sin x – y^2.

   $y' = \frac{(1 - \sin\ x + y^2)}{(e^y - 2xy)}$

2) Cari harga y ′ bila diketahui : $x^2y + 3y - 4 = 2$

   Penyelesaian :

$x^2y + 3y - 4 = 2$
$x^2y + 3y - 6 = 0$

diturunkan menjadi :

$x^2y' + 2xy + 3y' = 0$
$y'(x^2 + 3) = -2xy$ $\rightarrow$ $y' = \dfrac{-2xy}{x^2 + 3}$

3) Tentukan turunan pertama (dy/dx) dari fungsi berikut : 5y + 4x + 10 = 0

Penyelesaian :

5y + 4x + 10 = 0

5y′ + 4 + 0 = 0

5y′ = -4 $\rightarrow$ $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{5}$

4) Tentukan turunan pertama (dy/dx) dari fungsi berikut ini : $y^2 + x^2 = 5^2$

Penyelesaian :

$y^2 + x^2 = 5^2$

2y.y′ + 2x = 0

$y' = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$

Atau : $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

5) Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut ini : y = sin (x + y)

Penyelesaian :

y = sin (x + y) maka : y′ = cos (x + y).(x + y)′

y′ = cos (x + y). (1 + y′)

y′ = cos (x + y) + cos (x + y)y′

y′ – cos (x + y)y′ = cos (x + y)

y′[1 – cos (x + y)] = cos (x + y) $\rightarrow$ $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}$

6) Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut : y = cos (x + y) + $4x^2y$

Penyelesaian :

y = cos (x + y) + $4x^2y$

y′ = -sin (x + y).(x + y)′ + 8xy + $4x^2y'$

$y' = -\sin(x + y).(1 + y') + 8xy + 4x^2y'$

$y' = -\sin (x + y) - \sin (x + y)y' + 8xy + 4x^2y'$

$[1 + \sin (x + y) - 4x^2]y' = -\sin(x + y) + 8xy$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)+8xy}{1+\sin(x+y)-4x^2}$$

7) Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut ini : $e^{x+y} + e^{x-y} = 10$

Penyelesaian :

$$e^{x+y} + e^{x-y} = 10$$

$$e^{x+y}(x+y)' + e^{x-y}(x-y)' = 0$$

$$e^{x+y}(1+y') + e^{x-y}(1-y') = 0$$

$$e^{x+y} + e^{x+y}(y') + e^{x-y} - e^{x-y}(y') = 0$$

$$\left[e^{x+y} - e^{x-y}\right]y' = -e^{x-y} - e^{x-y} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-e^{x-y} - e^{x-y}}{e^{x+y} - e^{x-y}}$$

8) Diketahui : $y = x^x$

Penyelesaian :

$$y = x^x$$

Ruas kiri dan kanan dikalikan dengan ln, maka :

$$\ln(y) = \ln(x^x)$$
$$\ln(y) = x\ln x$$
$$\frac{1}{y}y' = \ln x + \frac{1}{x}x$$

$$y' = (1+\ln x)y \qquad \text{atau} \qquad y' = (1+\ln x)x^x$$

9) Diketahui : $y = f(x) = x^{\sin x}$

penyelesian :

$$\ln(y) = \ln(x^{\sin x})$$
$$\ln(y) = \sin x \ln(x)$$

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x$$

$$y' = (\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x)y$$

$$y' = (\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x)x^{\sin x} \quad \rightarrow \quad y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

7.4. Rangkuman

Aturan rantai fungsi bersusun merupakan aturan yang digunakan untuk menyelesaikan turunan fungsi komposisi. Aturan rantai membantu menyelesaikan turunan fungsi yang terdiri dari komposisi dua buah fungsi atau lebih. Cara penyelesaiannya dengan memecahkan komposisi fungsi tersebut menjadi beberapa peubah.

7.5. Latihan

1. Tentukan turunan untuk fungsi-fungsi berikut ini.

a) $y = \left(\frac{x^3 - 1}{2x + 1}\right)^4$

b) $y = \frac{5}{x^3 + 2} + \frac{2}{2x}$

c) $s = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

d) $y = \frac{(2x^2 - 3x + 1)}{2x + 1}$

e) $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

f) $f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}}$

g) $z = \frac{w}{\sqrt{1 - 4w^2}}$

h) $y = x^{\ln x}$

i) $\theta = \frac{3r + 2}{2r + 3}$

j) $y = \frac{4}{2x^3}$

k) $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$

l) $y = \ln \frac{e^x}{1 + e^x}$

m) $y = \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2}$

n) $y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3 \sqrt[3]{(x-3)^7}}}$

2. Tentukan turunan dari fungsi berikut :

a) $x^4 + 16y^4 = 32$

b) $y = x^{\ln x}$

c) $x^2 y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$

d) $y = \sin(x + y)$

e) $y = (\ln x)^{\sin x}$

f) $e^{x+y} + e^{x-y} = 15$

g) $xy + 2x - 3y = 0$

3. Cari y′ dan y′′, bila diketahui $x^2 - xy + y^2 = 3$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 8
UJIAN TENGAH SEMESTER (UTS)

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa mampu menjawab dan menyelesaikan permasalahan yang diberikan dalam soal
Sub Pokok Bahasan	:	8.1. Contoh soal UTS
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993.

		6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

8.1. Contoh Soal UTS

Kerjakan **A** untuk digit NIM terakhir **Genap** dan **B** untuk digit NIM terakhir **Ganjil**

1. Selesaikanlah persoalan limit berikut ini :

A. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-2}{n^2+3n+2}\right)^{n^2+5}$ **B.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-2x+4}{4x^2-2x+2}\right)^{x^2-4}$

2. Gambarkanlah grafik fungsi persamaan kuadrat berikut :

A. $y = x^2 - 2x - 8$ **B.** $y = -2x^2 + 4x + 6$

3. Tentukan turunan kedua dari fungsi berikut ini :

A. $y = 5e^{\cos(2x)} + 5x^4 - \ln\left(3x^2 - 8\right)$ **B.** $y = \sin(x^2+3) - 2e^{(3x^2-8)} + 4x^3$

4. Tentukan turunan parsial pertama dari fungsi berikut :

A. $z = f(x,y) = 2x^2y^3 - 4e^{xy^2} + 3\cos(x^3y^2)$

B. $z = f(x,y) = 7\ln\left(2xy^2\right) + 2\sin(x^3y^2) + x^4y^3$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 9

TURUNAN (DIFFERENSIAL) : TURUNAN TINGKAT TINGGI, TURUNAN PARSIAL DAN TURUNAN PARSIAL TINGKAT TINGGI

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami prinsip turunan dan penggunaannya
Sub Pokok Bahasan	:	9.1. Turunan tingkat tinggi 9.2. Turunan Parsial 9.3. Turunan Parsial tingkat tinggi
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia.

		5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

9.1. Turunan Tingkat Tinggi

Jika y = f(x) mempunyai turunan pada suatu interval, maka turunan tersebut $y' = f'(x)$ merupakan suatu fungsi baru pada interval tersebut. Kalau fungsi yang baru tadi diturunkan, maka turunannya ditulis $y'' = f''(x)$, disebut turunan kedua dari y = f(x) terhadap x. Demikian seterusnya pengertian yang serupa untuk turunan ketiga $y''' = f'''(x)$, turunan keempat, kelima dan seterusnya.

Turunan ke-n dari y = f(x) dilambangkan dengan $f^n(x)$ atau $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

Cara penulisan (notasi) untuk turunan dari y = f(x) ditunjukkan pada tabel 8.1.

Tabel 8.1. Cara penulisan (notasi) untuk turunan dari fungsi y = f(x)

Turunan	Notasi f′	Notasi Y′	Notasi D	Notasi Leibniz
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Turunan	**Notasi f′**	**Notasi Y′**	**Notasi D**	**Notasi Leibniz**
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Keempat	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
Kelima	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	$D_x^5 y$	$\frac{d^5y}{dx^5}$
Keenam . ke-n	$f^{(5)}(x)$ $f^{(n)}(x)$	$y^{(6)}$ $y^{(n)}$	$D_x^6 y$ $D_x^n y$	$\frac{d^6y}{dx^6}$ $\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh-contoh soal :

1) Diketahui : $y = f(x) = 4x^3 + 2x - 12$, tentukanlah turunan ke dua dari fungsi tersebut.

   Penyelesaian :

$y = f(x) = 4x^3 + 2x - 12$

- Turunan pertama :

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 2$$

- Turunan kedua :

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 2$$

2) Tentukanlah turunan kedua dari fungsi berikut : $y = f(x) = \sqrt{5x^2 + 10}$

Penyelesaian :

$y = f(x) = \sqrt{5x^2 + 10} = (5x^2 + 10)^{1/2}$

- Turunan Pertama dari fungsi adalah :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(5x^2 + 10)^{-1/2}(5x^2 + 10)$$

$$= \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 10}}$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 10}}$$

- Turunan kedua dari fungsi adalah :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5\sqrt{5x^2 + 10} - 5x\left(\frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 10}}\right)}{\left(\sqrt{5x^2 + 10}\right)^2}$$

$$= \frac{5\sqrt{5x^2 + 10} - \frac{25x^2}{\sqrt{5x^2 + 10}}}{5x^2 + 10}$$

$$= \frac{5\sqrt{5x^2 + 10}}{5x^2 + 10} - \frac{25x^2}{\sqrt{\left(5x^2 + 10\right)^3}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10}} - \frac{25x^2}{\sqrt{\left(5x^2 + 10\right)^3}}$$

3) Jika y = cos 2x, tentukan d^2y/dx^2 dan d^3y/dx^3 !

Penyelesaian :

- Turunan pertama : $\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x$
- Turunan kedua : $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x$
- Turunan ketiga : $\frac{d^3y}{dx^3} = 8\sin 2x$

4) Jika $y = \frac{x}{2x+4}$, tentukan $D_x^2 y$!

Penyelesian :

$D_x y = \frac{4}{(2x+4)^2}$ dan $D_x^2 y = \frac{-(8x+16)}{(2x+1)^4}$

5) Diketahui : $y = \ln(x^2+2)$, tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$!

Penyelesaian :

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2+2)}.(x^2+2)'$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2x)'(x^2+2)-(x^2+2)'(2x)}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2+2)}$ $= \frac{2(x^2+2)-(2x)(2x)}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{-2x^2+4}{x^4+4x^2+4}$

6) Tentukan d^2y/dx^2 dan d^3y/dx^3 dari fungsi : $y = f(x) = 3e^{\cos x}$.

Penyelesaian :

- Turunan pertama : $\frac{dy}{dx} = 3e^{\cos x}(-\sin x) = -3\sin x.e^{\cos x}$
- Turunan kedua : $\frac{d^2y}{dx^2} = -3\cos x.e^{\cos x} - 3\sin x.e^{\cos x}(-\sin x)$

  $= -3\cos x.e^{\cos x} + 3\sin^2 x.e^{\cos x}$
- Turunan ketiga :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3\sin x.e^{\cos x} - 3\cos x.e^{\cos x}(-\sin x) + 6\sin x\cos x.e^{\cos x} + 3\sin^2 x.e^{\cos x}(-\sin x)$$

$$= 3\sin x.e^{\cos x} + 3\sin x\cos x.e^{\cos x} + 6\sin x\cos x.e^{\cos x} - 3\sin^3 x.e^{\cos x}$$

9.2. Turunan Parsial

Andaikan bahwa f adalah suatu fungsi dua peubah/variabel x dan y. Jika y ditahan agar konstan, misalnya $y = y_o$, maka $f(x,y_o)$ menjadi suatu fungsi peubah x.

Turunannya di x = x_o disebut ***turunan parsial*** terhadap x di (x_o,y_o) dan dinyatakan sebagai $f_x(x_o,y_o)$. Jadi,

$$f_x(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Demikian pula, turunan parsial f terhadap y di (x_o,y_o) dan dinyatakan sebagai $f_y(x_o,y_o)$ dan dituliskan sebagai

$$f_y(x_o, y_o) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ketimbang menghitung $f_x(x_o, y_o)$ dan $f_y(x_o, y_o)$ secara langsung dari definisi diatas, secara khas kita mencari $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ dengan menggunakan aturan baku untuk turunan; kemudian disubsitusikan x = x_o dan y=y_o.

Lambang ∂ adalah khas dalam matematika dan disebut tanda turunan parsial.

Jika z = f(x,y), digunakan cara penulisan lain :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$f_x(x_0, y_o) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_o, y_o)} \qquad f_y(x_o, y_o) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_o, y_0)}$$

Contoh soal :

1) Carilah $f_x = (1,2)$ dan $f_y = (1,2)$ jika $f_{(x,y)} = x^2y + 3y^3$

Penyelesian :

Untuk mencari $f_x(x, y)$ y dianggap sebagai konstanta dan fungsi dideferensialkan terhadap x didapat,

$$f_x(x, y) = 2xy + 0$$

Jadi, $f_x(1,2) = 2.1.2 = 4$

Demikian pula, $f_y(x, y) = x^2 + 9y^2$

Sehingga $f_y(1,2) = 1^2 + 9.2^2 = 37$

2) Jika $z = x^2 \sin(xy^2)$, cari $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin(xy^2)\right] + \sin(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

$$= x^2\cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \sin(xy^2).2x$$

$$= x^2\cos(xy^2).y^2 + 2x\sin(xy^2)$$

$$= x^2y^2\cos(xy^2) + 2x\sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(xy^2).2xy = 2x^3y\cos(xy^2)$$

3) Tentukan $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ dari fungsi : z = f(x,y) = $5x^4y^2 + 3xy^2 - 4x^2 + y$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 20x^3y^2 + 3y^2 - 8x \qquad \text{dan}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^4y + 6xy + 1$$

4) Tentukan $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ dari fungsi : $z = f(x,y) = 2e^{\sin(xy)}$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{\sin(xy)}.\cos(xy).y \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{\sin(xy)}.\cos(xy).x$$

$$= 2ye^{\sin(xy)}.\cos(xy) \qquad\qquad = 2xe^{\sin(xy)}.\cos(xy)$$

5) Tentukan $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ dari fungsi : $z = f(x,y) = \dfrac{x^2y}{y^3+2}$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{y^3+2} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2(y^3+2) - x^2y(3y^2)}{(y^3+2)}$$

$$= \frac{x^2y^3 + 2x^2 - 3x^2y^3)}{y^6 + 4y^3 + 4}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x^2y^3}{y^6 + 4y^3 + 4}$$

6) Jika diketahui : z = f(x,y) = $\sqrt{x^2 + 3xy^2 + y^3}$, maka tentukan turunan parsial pertama dari fungsi tersebut.

Penyelesaian :

$$z = \sqrt{x^2 + 3xy^2 + y^3} = \left(x^2 + 3xy^2 + y^3\right)^{1/2}$$

Turunan parsial pertama terhadap x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3xy^2 + y^3\right)^{-1/2}.\left(2x + 3y^2\right)$$

$$= \frac{\left(2x + 3y^2\right)}{2\sqrt{x^2 + 3xy^2 + y^3}}$$

Turunan Parsial pertama terhadap y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3xy^2 + y^3\right)^{-1/2}.\left(6xy + 3y^2\right)$$

$$= \frac{\left(6xy + 3y^2\right)}{2\sqrt{x^2 + 3xy^2 + y^3}}$$

7) Tentukan turunan parsial pertama dari fungsi berikut : $z = \ln\left(5xy^2 + 2x^3y + 6\right)$

Penyelesaian :

Turunan parsial pertama terhadap x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{5xy^2 + 2x^3y + 6}\left(5xy^2 + 2x^3y + 6\right)'_x$$

$$= \frac{5y^2 + 6x^2y}{5xy^2 + 2x^3y + 6}$$

Turunan Parsial pertama terhadap y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{5xy^2 + 2x^3y + 6}\left(5xy^2 + 2x^3y + 6\right)'_y$$

$$= \frac{10xy + 2x^3}{5xy^2 + 2x^3y + 6}$$

8) Tentukan turunan parsial pertama dari fungsi berikut : $z = e^{(x^3y + x^2 + xy)}$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^3y + x^2 + xy}.\left(x^3y + x^2 + xy\right)'_x \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^3y + x^2 + xy}.\left(x^3y + x^2 + xy\right)'_y$$

$$= e^{x^3y + x^2 + xy}.\left(3x^2y + 2x + y\right) \qquad = e^{x^3y + x^2 + xy}.\left(x^3 + x\right)$$

$$= \left(3x^2y + 2x + y\right).e^{x^3y + x^2 + xy} \qquad = \left(x^3 + x\right).e^{x^3y + x^2 + xy}$$

9.3. Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi x dan y adalah fungsi lain dari dua peubah yang sama ini, turunan tersebut dapat diturunkan secara parsial terhadap x dan y untuk memperoleh empat buah turunan parsial kedua fungsi f :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{dan} \quad f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Soal-soal dan Penyelesaian :

1) Tentukan turunan parsial ke dua dari fungsi berikut ini : $z = 2x^3y^2 + 5xy^3 + y^2$ dan buktikan bahwa : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Penyelesaian :

Turunan parsial pertama dari fungsi adalah :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2 + 5y^3 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y + 15xy^2 + 2y$$

Turunan parsial kedua dari fungsi adalah :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12xy^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^3 + 30xy + 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3y + 15xy^2 + 2y\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^2y^2 + 5y^3\right)$$

$$= 12x^2y + 15y^2 \qquad = 12x^2y + 15y^2$$

Terbukti bahwa : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^2y + 15y^2$

2) Tentukan keempat turunan parsial kedua dari : $f(x,y) = xe^y - \sin(x/y) + x^3y^2$

Penyelesaian :

Turunan parsial pertama :

$$f_x(x,y) = e^y - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2y^2 \quad \text{dan} \quad f_y(x,y) = xe^y + \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3y$$

Turunan parsial kedua :

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + 6xy^2$$

$$f_{yy}(x,y) = xe^y + \frac{x^2}{y^4}\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

$$f_{yx}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + 6x^2y$$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Tentukan turunan dari fungsi berikut ini :

   a) y = f(x) = x^2 + 3x +5

   $$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 5 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5$$

   $$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5 - y$$

   $$= (2x+3)\Delta x + \Delta x^2$$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x$$

   $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3$$

   b) $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$ di x = 1 dan x = 3. Tunjukkan bahwa turunan ini tidak ada di x = 2, dimana fungsi diskontinu.

   Penyelesaian :

   $$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2}$$

   $$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x - 2} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x-2)-(x+\Delta x-2)}{(x-2)(x+\Delta x-2)} = \frac{-\Delta x}{(x-2)(x+\Delta x-2)}$$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)}$$

   $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

   Di x = 1 $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1$

Di x = 3 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(3-2)^2} = -1$

Di x = 2 $\Rightarrow \frac{dy}{dx}$ tidak ada karena penyebut adalah nol.

2. Tentukan turunan pertama dari :

a) $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x+\ln x}$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{2x(x+\ln x)-(1+\frac{1}{x})(x^2+1)}{(x+\ln x)^2}$$

$$= \frac{x^3+2x^2\ln x - x^2 - x - 1}{x^3+2x^2\ln x + x\ln^2 x}$$

b) $y = f(x) = (3x+2)^4$

Penyelesaian :

Misalkan 3x + 2 = u $\rightarrow$ $(3x + 2)^4 = u^4$

Maka : $y' = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 4u^3.3 = 12(3x+2)^3$

c) $y = f(x) = e^{(x-1)^2}$

Penyelesian :

$$y' = e^{(x-1)^2}.2(x-1) = (2x-2)e^{(x-1)^2}$$

d) $y = f(x) = 2\ln(x+\sqrt{2+x^2})$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+\sqrt{2+x^2}}\left[1+\frac{1}{2}(2+x^2)^{-1/2}(2x)\right]$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{2+x^2}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right]$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{2+x^2}}\left[\frac{\sqrt{2+x^2}+x}{\sqrt{2+x^2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{2+x^2}}$$

3. Tentukan turunan pertama (dy/dx) dari fungsi berikut :

a) y + x = 25

Penyelesaian :

Cara 1:

Yaitu dengan merubah fungsi implicit menjadi fungsi eksplicit karena soal diatas, masih sederhana.

$y + x = 25 \rightarrow y = 25 - x$

$y' = 0 - 1 = -1$

Cara 2:

$y + x = 25 \rightarrow 1\,dy + 1\,dx = 0$

$$\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

Cara 3 :

$y + x = 25 \rightarrow y' + 1 = 0 \rightarrow y' = -1$

b) $y^2 + x^2 = 5^2$

Penyelesaian :

$$y^2 + x^2 = 5^2$$

$$2y.y' + 2x = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

Atau : $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$

4. Hitung y' dan y'' jika diberikan $x^3y + xy^3 = 2$ dan $x = 1$

Penyelesian :

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$$

Untuk x = 1, diperoleh y = 1

Subsitusi ke dalam kedua persamaan memberikan $y' = -1$ dan $y'' = 0$

5. Tentukan turunan parsial pertama dari fungsi berikut ini :

a. $z = f(x, y) = 4xy^3 + \sin(x^2y^2)$

penyelesaian :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y^3 + \cos(x^2y^2).(2xy^2) = 4y^3 + 2xy^2\cos(x^2y^2)$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12xy^2 + \cos(x^2y^2).(2x^2y) = 12xy^2 + 2x^2y.\cos(x^2y^2)$$

b. $f(x,y) = \ln(e^{2xy}) + \sqrt{4x^2 + x^3y}$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{e^{2xy}}(2y) + \frac{1}{2}\left(4x^2 + x^3y\right)^{-1/2}(8x + 3x^2y)$$

$$= \frac{2y}{e^{2xy}} + \frac{8x + 3x^2y}{2\sqrt{4x^2 + x^3y}}$$

6. Buktikan kebenaran bahwa : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dari fungsi berikut ini

a) $f(x,y) = 5x^3y^2 + 3e^{x^2y}$

Penyelesaian :

Turunan parsial pertama dari fungsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^2y^2 + 3e^{x^2y}(2xy) \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10x^3y + 3e^{x^2y}(x^2)$$

$$= 15x^2y^2 + 6xye^{x^2y} \qquad\qquad = 10x^3y + 3x^2e^{x^2y}$$

Turunan parsial kedua dari fungsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[30xy^2 + 6e^{x^2y} + (6x)e^{x^2y}(2x)\right]$$

$$= 30xy^2 + 6e^{x^2y} + 12x^2e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[10x^3 + (6x)e^{x^2y} + (3x^2)e^{x^2y}(x^2)\right]$$

$$= 10x^3 + 6xe^{x^2y} + 3x^4e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[10x^3y + 3x^2e^{x^2y}\right]$$

$$= 30x^2y + (6x)e^{x^2y} + 3x^2e^{x^2y}(2xy)$$

$$= 30x^2y + 6xe^{x^2y} + 6x^3y.e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[15x^2y^2 + 6xye^{x^2y}\right]$$

$$= 30x^2y + (6x)e^{x^2y} + 6xy.e^{x^2y}(x^2)$$

$$= 30x^2y + 6xe^{x^2y} + 6x^3y.e^{x^2y}$$

Terbukti bahwa : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 30x^2y + 6xe^{x^2y} + 6x^3y.e^{x^2y}$

9.4. Rangkuman

Untuk menentukan turunan parsial dapat dilakukan dengan menggunakan metode sederhana, yaitu misalkan z = F(x,y) maka untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ berarti menurunkan variabel x dan variabel y dianggap konstan dan selanjutnya y diturunkan. Demikian juga untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$ berarti menurunkan variabel y dan variabel x dianggap konstan, selanjutnya diturunkan.

9.5. Latihan

1. Tentukan turunan parsial pertama fungsi yang diberikan terhadap tiap peubah/variabel bebasnya.

   a) $f(x,y) = (2x - y)^4$

   b) $f(x,y) = e^y \sin x$

   c) $g(x,y) = e^{-xy}$

   d) $f(x,y) = \tan^{-1}(4x - 7y)$

   e) $f(r,\theta) = 3r^3 \cos 2\theta$

   f) $f(x,y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$

2. Periksa kebenaran bahwa : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

   a) $f(x,y) = \tan^{-1} xy$

   b) $f(x,y) = 3e^{2x} \cos y$

3. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut ini :

   a) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ...?$

   b) $x + xy + y = 2 \Rightarrow y'' = ...?$

   c) $y = \frac{1}{x^2}$ Hitung $y^{(n)}$

   d) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *Hitung* y^{iv}

   e) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$ *hitung* $f^{(n)}$

   f) $y = \frac{u-1}{u+1},\ u = \sqrt{x}.$ *Hitung* $\frac{dy}{dx}$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 10
PENGGUNAAN (APLIKASI) TURUNAN

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami konsep dasar turunan dan penggunaannya
Sub Pokok Bahasan	:	10.1. Garis Singgung dan Normal 10.2. Nilai maksimum dan minimum 10.3. Dalam Bidang Ekonomi : Biaya Marginal, Keuntungan/ kerugian dan Pulang Pokok 10.4. Kecepatan dan Percepatan
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar*

		untuk Perguruan Tinggi", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Turunan fungsi banyak sekali digunakan dalam bidang ekonomi untuk menghitung keuntungan marginal, biaya total (*total cost*) atau total penerimaan (*total revenue*), juga dalam bidang biologi untuk menghitung laju pertumbuhan organisme, dalam bidang fisika untuk menghitung kepadatan kawat, dalam bidang kimia untuk menghitung laju pemisahan, dan banyak bidang lainnya. Diantaranya akan dibahas pada bagian ini.

10.1. Garis Singgung dan Normal

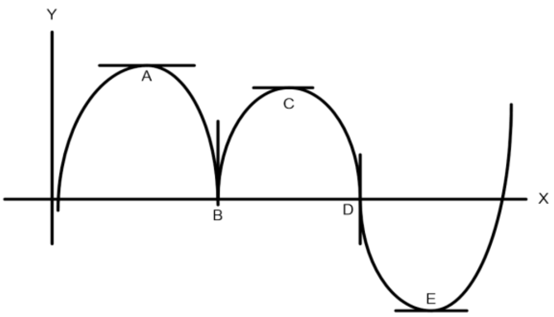
Jika fungsi f(x) mempunyai turunan terbatas $f'(x_o)$ di $x = x_o$, kurva $y = f(x)$ mempunyai garis singgung di $P_o(x_o , y_o)$ yang tangen (koefisien) arahnya adalah

$$m = \tan \theta = f'(x_o) \quad \text{............. ....} \quad (10.1)$$

Jika m = 0, maka kurva tersebut mempunyai garis singgung horisontal (sejajar sumbu x) dengan persamaan $y = y_o$ di P_o, seperti di A, C dan E pada gambar 10.1.

Garis singgung tersebut mempunyai persamaan :

$$y - y_o = m(x - x_o) \quad \text{..} \quad (10.2)$$



Gambar 10.1. garis singgung dan garis normal

Jika f(x) kontinu pada $x = x_o$ tetapi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, kurva mempunyai garis singgung vertikal (sejajar sumbu y) dengan persamaan $x = x_o$, seperti di B dan D pada gambar 9.1. Garis normal suatu kurva pada salah satu titiknya adalah garis yang lewat titik tersebut dan tegak lurus garis singgung di titik tersebut. Persamaan garis normal di (x_o, y_o) adalah:

$$y - y_o = -\frac{1}{m}(x - x_0) \quad \text{..} \quad (10.3)$$

Bila : - garis singgung // sumbu y, maka garis normal // sumbu x

- garis singgung // sumbu x, maka garis normal // sumbu y.

Contoh soal dan penyelesaian :

1) Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada $y = x^3 - 2x^2 + 4$ pada titik (2, 4).

Penyelesaian :

$f'(x) = y' = 3x^2 - 4x$ dan $f'(2) = 4$

Jadi garis singgung : $y - 4 = 4(x - 2)$ atau $y = 4x - 4$

Garis normal : $y - 4 = -\frac{(x-2)}{4}$ atau $4y = x + 14$

2) Cari persamaan garis singgung dan normal pada $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ pada titik(1,1).

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y}{3x+2y}$$

Tangen arah (koefisien) garis singgung pada titik (1, 1) adalah m = -1

Persamaan garis singgung adalah : $y - 1 = -1(x - 1)$ atau $x + y = 2$

Persamaan garis normal adalah : $y - 1 = 1(x - 1)$ atau $x - y = 0$

3) Tentukan persamaan garis singgung di titik (2, 4) pada kurva $y = 4x^2 + x$.

Penyelesaian :

$y = 4x^2 + x \Rightarrow y' = 8x + 1$

$y'(2) = 8(2) + 1 = 17$

Maka persamaan garis singgung di titik (2, 4) adalah :

$y - 4 = 18 (x - 2)$

$y - 4 = 18x - 36$

$y = 18x - 32$

10.2. Nilai Maksimum dan Minimum

Fungsi naik dan turun

Suatu fungsi f(x) dikatakan naik di $x = x_o$, jika untuk h positif dan cukup kecil, $f(x_o - h) < f(x_o) < f(x_o + h)$. Suatu fungsi f(x) dikatakan turun di $x = x_o$, jika untuk h positip dan cukup kecil, $f(x_o - h) > f(x_o) > f(x_o + h)$.

Jika $f'(x_o) > 0$, maka f(x) adalah fungsi naik di $x = x_o$; jika $f'(x_o) < 0$, maka f(x) adalah fungsi turun di $x = x_o$.

Pengujian turunan pertama

1. Tentukan $f^{'}(x_o) = 0$ untuk mendapatkan harga kritis
2. Gambar harga kritis pada garis bilangan, dengan demikian terbentuk sejumlah selang.
3. Tentukan tanda $f^{'}(x_o)$ pada tiap selang.
4. Misalkan x bertambah setelah tiap harga kritis x = xo, maka f(x) mempunyai harga maksimum (=f(xo)) jika $f^{'}(x)$ berubah dari + ke -,

   f(x) mempunyai harga minimum (=f(xo)) jika $f^{'}(x)$ berubah dari – ke +

   f(x) tidak mempunyai harga maksimum ataupun minimum di x = xo jika $f^{'}(x)$ tidak mengalami perubahan tanda.

Arah belokan (*direction of bending*)

Suatu busur kurva y = f(x) disebut cekung ke atas, jika disetiap titiknya busur terletak diatas tangen titik tersebut.

Pengujian kedua untuk Maksima dan minima. Pengujian turunan kedua

1. Tentukan f′ (x) = 0 untuk mendapatkan harga-harga kritis
2. Untuk harga kritis x = xo :
   - f(x) mempunyai harga maksimum (= f(xo)), jika f′′(x) < 0
   - f(x) mempunyai harga minimum (=f(xo)), jika f′′(x) > 0,
   - Pengujian gagal jika f ′′ (xo) = 0 atau menjadi tak terhingga.

Dalam keadaan terakhir, metode turunan pertama harus digunakan.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Diketahui $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$.

   Tentukan :

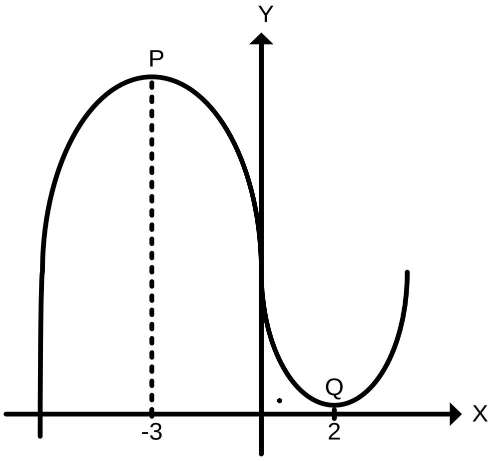
   a) titik-titik kritis

   b) interval dimana y naik dan turun

   c) nilai-nilai maksimum dan minimum dari y

Penyelesaian :

a) $y' = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$



Untuk y' = 0 memberikan x = -3 dan x = 2

Titik-titik ekstrim adalah $P = \left(-3, \frac{43}{2}\right)$ dan $Q = \left(2, \frac{2}{3}\right)$

b) Jika y' positif, maka y naik; jika y' negatif, maka y turun

Untuk x <-3 maka y' = (-)(-) = +, berarti fungsi naik

Untuk -3< x <2 maka y' = (+)(-) = -, berarti fungsi turun

Untuk x > 2 maka y' = (+)(+) = +, berarti fungsi naik

c) Dari uraian pada b langsung dapat ditarik kesimpulan bahwa P titik maksimum dan Q titik minimum.

2) Diberikan fungsi : f(x) = $(x - 2)^4$, tentukan interval-interval dimana f(x) naik atau turun.

Penyelesaian :

Syarat titik ekstrim :

$$f'(x) = 4(x-2)^3$$

f ′(x) = 0 $\rightarrow$ $4(x-2)^3 = 0$

$$x = 2$$

Titik ekstrim:

f(x) = $(2 - 2)^4$ = 0 $\Rightarrow$ (2, 0)

Menyelidiki naik turunya fungsi dengan interval :

Untuk x < 2 $\Rightarrow$ f ′(x) < 0 (negatif), berarti fungsi turun

Untuk $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ (positif), berarti fungsi naik

- - - - - - - | + + + + +

$x < 2$ 2 $x > 2$

3) Tentukan koordinat titik ekstrim dan harga ekstrim dari $y = x^2 - 2x + 4$

Penyelesaian :

Syarat titik ekstrim :

$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$y = 1^2 - 2(1) + 4 = 3$$

Maka koordinat titik ekstrim adalah (1, 3)

Dengan uji turunan kedua :

$$y'' = 2 \rightarrow y'' > 0$$

Pada titik (1, 3) nilai dari fungsi bernilai minimum

4) Jumlah dua buah bilangan sama dengan 150. Jika hasil kali sebuah bilangan dengan kuadrat bilangan yang lain mencapai nilai maksimum, tentukan nilai kedua bilangan t serta nilai maksimum tersebut.

Penyelesaian :

Misalkan kedua bilangan tersebut adalah x dan y, sehingga didapatkan hubungan:

$x + y = 150 \quad \rightarrow \quad y = 150 - x$

Misalkan hasil sebuah bilangan dengan kuadrat bilangan yang lain dinyatakan dengan Z, maka Z sebagai fungsi x adalah :

$Z(x) = yx^2$

$Z(x) = (150 - x)x^2$

$Z(x) = 150x^2 - x^3 \rightarrow$ untuk $0 \le x \le 150$

Fungsi : $Z(x) = 150x^2 - x^3$ akan dimaksimumkan dengan menggunakan analisis turunan.

Analisa dengan turunan pertama dan kedua dari Z(x) terhadap x adalah :

$$Z'(x) = \frac{dZ}{dx} = 300x - 3x^2 \quad \text{dan}$$

$$Z''(x) = \frac{d^2Z}{dx^2} = 300 - 6x$$

- Syarat titik ekstrim $\rightarrow$ $Z'(x) = \frac{dZ}{dx} = 0$

  $300x - 3x^2 = 0$

  $3x\,(100 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ atau $x = 100$

- Dengan uji turunan kedua :

  $x = 0 \rightarrow Z''(x) = 300 - 6(0) = 300, \quad Z''(x) > 0$

  maka pada x = 0 terjadi nilai balik minimum

  $x = 100 \rightarrow Z''(x) = 300 - 6(100) = -300, \; Z''(x) < 0$

  pada x = 100, terjadi nilai balik maksimum

  Sehingga yang memenuhi adalah x = 100 dan y = 150 -100 = 50

10.3. Dalam Bidang Ekonomi : Biaya Marginal, Keuntungan/kerugian dan Pulang Pokok

Aplikasi turunan pada bidang ekonomi dapat disebutkan diantaranya untuk memperhitungkan biaya marginal, keuntungan/kerugian dan pulang pokok.

Misalkan C(x) adalah biaya total yang dikeluarkan seseorang/sebuah perusahaan untuk menghasilkan x satuan barang tertentu. Fungsi C disebut sebagai fungsi biaya. Laju perubahan sesaat biaya terhadap banyaknya barang yang dihasilkan disebut sebagai Biaya Marginal.

Biaya marginal :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

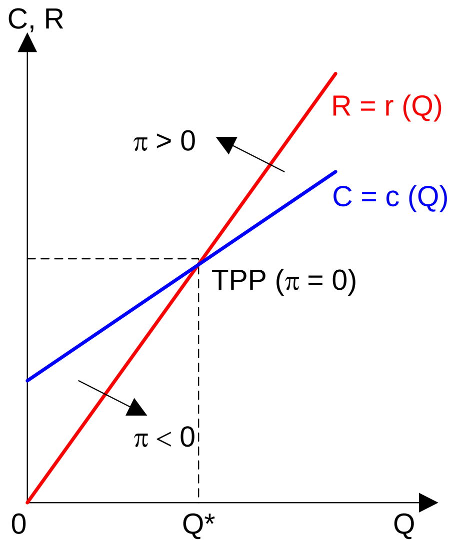
Misalkan sebuah perusahaan Es krim memperkirakan biaya memproduksi x es krim (dalam rupiah) adalah : $C(x) = 25.000 + 10x + 0{,}02x^2$, maka biaya marginalnya adalah: $\frac{dC}{dx} = C'(x) = 10 + 0{,}04x$, maka biaya marginalnya untuk tingkat produksi 1000 buah es krim adalah : $C'(1000) = 10 + 0{,}04(1000) = \text{Rp} \;\; 50{,}-/\text{buah}$

Penerimaan dan biaya merupakan variabel-variabel penting dalam mengetahui kondisi bisnis suatu perusahaan. Perusahaan mendapat keuntungan atau mengalami kerugian dapat dianalisis dengan mengetahui penerimaan total (R) yang diperoleh dan biaya total (C) yg dikeluarkan.

Keuntungan (profit positif, $\pi>0$), didapat bila R > C, kurva R terletak diatas kurva C).

Kerugian (profit negatif, $\pi < 0$), apabila R < C, kurva R terletak dibawah kurva C).

Pulang Pokok (*break-even*) merupakan suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan Pulang Pokok (Profit nol, $\pi = 0$), terjadi apabila R = C dimana perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak juga mengalami kerugian, secara grafik ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva R dan kurva C.



Gambar 10.2. Kurva R, C, Q

Q = jumlah produk

R = penerimaan Total

C = Biaya Total

π = profit total (= R – C)

TPP = Ttk Pulang Pokok (*break even point*)

Q* = posisi tingkat produksi pulang pokok.

Contoh-contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Biaya total produksi sejumlah x komputer setiap hari adalah : $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ rupiah dan harga jual setiap komputer $(50 - \frac{1}{2}x)$ rupiah. Agar diperoleh keuntungan optimal, berapa yang harus diproduksi komputer setiap harinya.

Penyelesaian :

Biaya produksi = $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$

Hasil penjualan = $x(50 - \frac{1}{2}x) = 50x - \frac{1}{2}x^2$

Maka keuntungan : f(x) = (hasil penjualan) – (biaya produksi)

$$f(x) = (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25) - (50x - \frac{1}{2}x^2)$$

$$= \frac{3}{4}x^2 - 15x + 25$$

$$f'(x) = \frac{6}{4}x - 15$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6}{4}x - 15 = 0$$

$$\frac{6}{4}x = 15 \quad \rightarrow x = 10$$

2) Penerimaan total yg diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan : $R = -0{,}10\ Q^2 + 20\ Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan : $C = 0{,}25\ Q^3 - 3\ Q^2 + 7\ Q + 20$. Hitunglah profit perusahaan ini jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 dan 20 unit.

Penyelesaian :

$\pi = R - C = -\ 0{,}10\ Q^2 + 20\ Q - 0{,}25\ Q^3 + 3\ Q^2 - 7Q - 20$

$\pi = -\ 0{,}25\ Q^3 + 2{,}90\ Q^2 + 13\ Q - 20$

$Q = 10 \ \rightrightarrows\ \pi = -0{,}25(10)^3 + 2{,}90(10)^2 + 13\ (10) - 20$

$= -250 + 290 + 130 - 20 = 150$ **(keuntungan)**

$Q = 20 \ \rightrightarrows\ \pi = -\ 0{,}25(20)^3 + 2{,}90\ (20)^2 + 13(20) - 20$

$= -\ 2000 + 1160 + 260 - 20 = -\ 600$ **(kerugian)**

10.4. Kecepatan dan Percepatan

Gerak suatu partikel P sepanjang suatu garis lurus secara lengkap dinyatakan oleh persamaan $s = f(t)$, $t \geq 0$ waktu, dan s jarak P dari suatu titik tetap yang tertentu 0 pada lintasannya.

Kecepatan *(velocity)* dari P pada waktu t adalah $v = \frac{ds}{dt}$

Jika $v > 0$, P bergerak searah dengan naiknnya s.

$v < 0$, P bergerak searah dengan turunnya s.

$v = 0$, P dalam keadaan berhenti/diam.

Percepatan (*accelaration*) dari P pada waktu t adalah $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Jika a > 0, v naik/bertambah; jika a < 0, v turun/berkurang.

Kelajuan (*speed*) bertambah bila v dan a bertanda sama

Kelajuan berkurang bila v dan a berlainan tanda.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisi s-nya memenuhi, $s = 2t^2 - 12t + 8$, dengan s diukur dalam sentimeter dan t dalam detik. Tentukan kecepatan benda bilamana t = 1 dan t = 6.

   a) Kapan kecepatannya 0 ?

   b) Kapan ia positif ?

   Penyelesaian :

   Jika digunakan lambang v(t) untuk kecepatan pada saat t, maka :

   $$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

   Jadi $v(1) = 4(1) - 12 = -8$ cm/detik

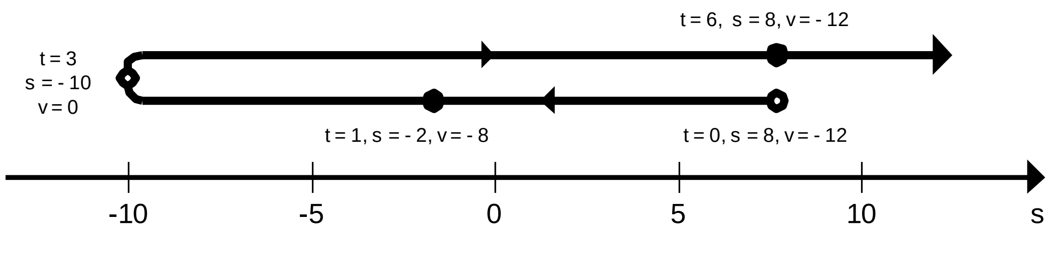
   $v(6) = 4(6) - 12 = 12$ cm/detik

   a) Kecepatan 0 bilamana 4t – 12 = 0, yaitu pada saat :

   $4t = 12 \rightarrow t = 3$

   b) Kecepatan positif bilamana t > 3.

   Hal ini dapat diperlihatkan secara skema pada gambar dibawah ini.



2) Sebuah partikel bergerak sepanjang garis lurus dengan ketentuan $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ Satuannya meter dan detik.

   Tempatkan partikel relatif terhadap titik awal 0 (ketika t = 0).

   Tentukan arah dan kecepatan serta tentukan apakah kelajuan bertambah atau berkurang ketika :

(a) t = 1/2 (c) t = 5/2

(b) t = 3/2 (d) t = 4

Penyelesaian :

(a) Kecepatan pada saat t adalah : $v(t)=\dfrac{ds}{dt}=3t^2-12t+9$

Pada waktu t = ½ det :

$$v(\tfrac{1}{2})=3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-12\left(\tfrac{1}{2}\right)+9=\tfrac{15}{4}\ \text{m/det}$$

$$s(\tfrac{1}{2})=\left(\tfrac{1}{2}\right)^3-6\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+9\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{25}{8}\ \text{m}$$

Maka pada waktu t = ½ det, partikel berada pada 25/8 m di kanan 0 bergerak ke kanan dengan kecepatan v = 15/4 m/det, berkurang

(b) Pada t = 3/2 det : $v(\tfrac{3}{2})=3\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-12\left(\tfrac{3}{2}\right)+9=-\tfrac{9}{4}\ \text{m/det}$ dan

$$s(\tfrac{3}{2})=\left(\tfrac{3}{2}\right)^3-6\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+9\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}\ \text{m}$$

Maka pada waktu t = 3/2 det, partikel berada pada 27/8 m di kanan 0 bergerak ke kiri dengan v = -9/4 m/det, bertambah.

(c) Pada t = 5/2 det : $v(\tfrac{5}{2})=3\left(\tfrac{5}{2}\right)^2-12\left(\tfrac{5}{2}\right)+9=-\tfrac{13}{4}\ \text{m/det}$ dan

$$s(\tfrac{5}{2})=\left(\tfrac{5}{2}\right)^3-6\left(\tfrac{5}{2}\right)^2+9\left(\tfrac{5}{2}\right)=\frac{5}{8}\ \text{m}$$

Maka pada waktu t = 5/2 det, partikel berada pada 5/ 8m di kanan 0 bergerak ke kiri dengan v = -9/4 m/det, berkurang.

(d) Pada t = 4 det : $v(4)=3(4)^2-12(4)+9=9$ m/det

$$s(4)=(4)^3-6(4)^2+9(4)=4\ \text{m}$$

Maka pada waktu t = 4 det, partikel berada pada 4 m di kanan 0 bergerak ke kanan dengan v = 9 m/det, bertambah.

3) Jumlah dari 2 bilangan positif = 20. tentukan bilangan-bilangan tersebut apabila :

a) perkaliannya maksimum
b) jumlah kuadratnya minimum
c) perkalian dari kuadrat bilangan pertama dan pangkat tiga bilangan yang kedua adalah maksimum.

Penyelesaian :

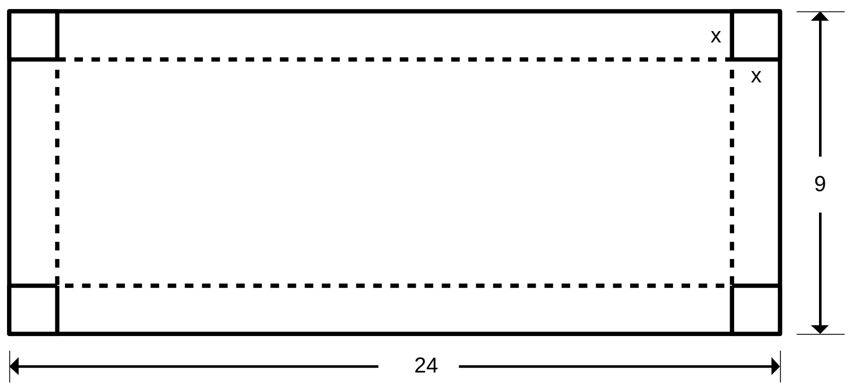
a) 10, 10 b) 10, 10 c) 8, 12

10.5. Rangkuman

Konsep turunan dapat digunakan dalam menentukan nilai ekstrim, nilai maksimum/minimum dari suatu fungsi, menentukan percepatan dan kecepatan, serta dalam Bidang Ekonomi untuk menentukan Biaya Marginal, Keuntungan/kerugian dan Pulang Pokok.

10.6. Latihan

1) Cari persamaan garis vertikal yang memotong kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ dan $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$ pada titik-titik dimana garis singgung pada masing-masing kurva adalah sejajar.
2) Carilah koordinat titik ekstrim dan harga ekstrim dari $y = x^2 - 2x + 4$
3) Kotak persegi panjang dibuat dari selembar papan, panjang 24 inci dan lebar 9 inci, dengan memotong bujur sangkar identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya, seperti gambar. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa volume tersebut ?



4) Sebuah benda bergerak sepanjang garis horisontal menurut rumus $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. Tentukan :
   (a) Bila s bertambah dan bila berkurang ?
   (b) Bila v bertambah dan bila berkurang ?
   (c) Bila kecepatan benda bertambah dan bila berkurang ?
   (d) Carilah jarak total yang dilalui dalam gerakan 5 detik pertama.

5) Sebuah batu, yang dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 34,3 m/det bergerak menurut rumus $s = 34,3t - 4,9t^2$ di mana s adalah jarak dari titik awal.

Hitunglah:

(a) Kecepatan dan percepatan jika $t = 3$ dan jika $t = 4$

(b) Ketinggian maksimum yang dicapai

(c) Bilamana ketinggiannya 29,4 m?

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 11
INTEGRAL :
RUMUS DASAR INTEGRAL

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami dan mampu mengaplikasikan rumus-rumus dasar integral
Sub Pokok Bahasan	:	11.1. Pengertian integral 11.2. Rumus-rumus Dasar Integral dasar 11.3. Integral Fungsi Aljabar 11.4. Integral Fungsi Eksponensial 11.5. Integral Fungsi Trigonometri 11.6. Integral Fungsi Invers Trigonometri
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*"

		3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Integral merupakan invers dari diferensial (turunan), oleh karena itu sebagai materi prasyarat dalam membahas integral adalah materi turunan yang sudah dibahas pada bab sebelumnya. Pemahaman tentang konsep turunan dapat digunakan untuk memahami konsep integral.

11.1. Pengertian Integral

Integral tak tentu (*Indefinite Integral)* merupakan sebuah bentuk operasi pengintegralan pada suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru.

Fungsi ini belum mempunyai nilai pasti sampai cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tidak tentu ini disebut sebagai integral tak tentu.

Misalkan dalam menentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut :

- $f_1(x) = 5x^3 + 5$
- $f_2(x) = 5x^3 + 7$
- $f_3(x) = 5x^3 - 2$

Fungsi-fungsi tersebut memiliki bentuk umum $f(x) = 5x^3 + c$, dengan *c* suatu konstanta. Setiap fungsi tersebut memiliki turunan $f'(x) = 15x^2$.

Jadi, turunan fungsi $f(x) = 5x^3 + c$ adalah $f'(x) = 15x^2$.

Kebalikannya, bagaimana jika menentukan fungsi f(x) dari f′(x) yang diketahui ? Menentukan fungsi f(x) dari f′(x), berarti menentukan antiturunan dari f′(x). Sehingga, integral merupakan **anti turunan** (**anti diferensial**) atau **operasi invers** terhadap diferensial.

Pengintegralan fungsi f(x) terhadap *x* dinotasikan sebagai berikut :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Dimana :

$\int$ = notasi integral (yang diperkenalkan oleh Leibniz, seorang matematikawan Jerman)

f(x) = fungsi integral

F(x) = fungsi integral umum yang bersifat F(x) = f′(x)

c = konstanta pengintegralan

Jika F(x) adalah sebuah fungsi yang turunannya F′(x) = f(x) pada interval tertentu dari sumbu-x, maka F(x) disebut anti-turunan atau integral tak tentu dari f(x) yang diberikan oleh : F(x) + c , dengan c sebarang konstanta, disebut Konstanta Integrasi.

11.2. Rumus-rumus Dasar Integral

Karena anti-diferensiasi adalah operasi invers dari diferensiasi, maka rumus-rumus anti-diferensiasi dapat diperoleh dari rumus-rumus diferensiasi.

Rumus-rumus dasar untuk integrasi dapat dibuktikan dari rumus diferensiasi bersangkutan.

Berikut merupakan rumus dasar yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persoalan integrasi, dimana c adalah konstatnta integrasi.

11.2.1. Integral Fungsi Aljabar

1) $\int k\ dx = kx + c$ $\rightarrow$ k = konstanta

2) $\int u^m\ du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c, m \neq -1$

3) $\int (u+v)\ dx = \int u\ dx + \int v\ dx$

4) $\int a\ u\ dx = a \int u\ dx$

5) $\int \dfrac{du}{u} = \ln\ |u| + c$

Contoh soal dan penyelesainnya :

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2. $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + C$

3. $\int \dfrac{(x-3)dx}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 - 6x + 5\right) + C$

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$

5. $\int \sqrt[3]{z}dz = \int z^{1/3} dz = \dfrac{z^{4/3}}{4/3} + C$

$= \dfrac{3}{4} z^{4/3} + C$

6. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

7. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-2/3} dx$

$= \dfrac{x^{1/3}}{1/3} = 3x^{1/3} + c$

9. $\int \dfrac{dx}{x+4} = \int \dfrac{d(x+4)}{x+4}$

$= \ln|x+4| + C$

10. $\int (1-x)\sqrt{x}dx = \int (x^{1/2} - x^{3/2})dx$

$= \int x^{1/2}dx - \int x^{3/2}dx$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}$

$= \frac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C$

12. $\int (3s+4)^2 ds = \int (9s^2 + 24s + 16)ds$

$= 9\left(\frac{1}{3}s^3\right) + 24\left(\frac{1}{2}s^2\right) + 16s + c$

$= 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$

13. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}dx = \int (x + 5 - 4x^{-2})dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + c$

14. $\int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln C = \ln C\sqrt{|x^2-1|}$

$= \ln C\sqrt{|x^2-1|}$

15. $\int (x^3+2)^2.3x^2dx$

Misalkan : $(x^3+2) = u \Rightarrow du = 3x^2dx$

$\int (x^3+2)^2.3x^2dx = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C$

$= \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1}$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)-1}{(x+3)+1}\right| + c$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

17. $\int \frac{x+2}{x+1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= x + \ln|x+1| + C$

18. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2dx$

$= \frac{1}{3}u^{1/4}du = \frac{1}{3}\frac{4}{3}u^{3/4} + C$

$= \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$

19. $\int (2x^2 - 5x + 3)dx = ?$

$= 2\int x^2dx - 5\int xdx + 3\int dx$

$= \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

20. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+9}}dx$

$= \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+9}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

$= \sqrt{x^2+9} + 2\ln(x + \sqrt{x^2+9}) + C$

21. $\int \frac{dx}{2x-3}$

Misalkan : u = 2x – 3 $\Rightarrow$ du = 2 dx

Sehingga : $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$

$= \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

Atau : $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{2x-3}$

$= \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

11.2.2. Integral Fungsi Eksponensial

1) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln\ a} + c; a > 0, a \neq 1$

2) $\int e^u du = e^u + c$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

2. $\int a^x e^x dx = \int (ae)^x\, dx$

$= \frac{(ae)^x}{\ln(ae)} + C = \frac{a^x e^x}{1+\ln a} + C$

3. $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}(3dx)$

$= \frac{e^{3x}}{3} + C$

4. $\int e^{-x} dx = -\int e^{-x}(-dx) = -e^{-x} + C$

5. $\int \frac{e^{1/x} dx}{x^2} = -\int e^{1/x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right)$

$= -e^{1/x} + C$

6. $\int \frac{2e^x dx}{e^x + 1} = 2\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$

$= 2\ \ln\left(e^x + 1\right) + C$

7. $\int a^{2x} dx = \frac{1}{2}\int a^{2x}(2dx)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^{2x}}{\ln a}\right) + C$

8. $\int (e^x + 1)^3 e^x dx$ = ?

Misalkan : u = $e^x + 1$ $\Rightarrow$ du = $e^x dx$

Sehingga : $\int (e^x+1)^3 e^x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\left(e^x+1\right)^4}{4} + C$

atau : $\int (e^x+1)^3 e^x dx = \int (e^x+1)^3 d(e^e+1) = \frac{(e^x+1)^4}{4} C$

11.2.3. Integral Fungsi Trigonometri

1) $\int \sin u \; du = -\cos u + c$

2) $\int \cos u \; du = \sin u + c$

3) $\int \tan u \; du = |\sec u| + c$

4) $\int \cot u \; du = \ln |\sin u| + c$

5) $\int \sec u \; du = \ln |\sec u + \tan u| + c$

6) $\int \csc u \; du = \ln |\csc u - \cot u| + c$

7) $\int \sec^2 u \; du = \tan u + c$

8) $\int \csc^2 u \; du = -\cot u + c$

9) $\int \sec u \tan u \; du = \sec u + c$

10) $\int \csc u \tan u \; du = -\csc u + c$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. $\int \sin \frac{1}{2} x dx = 2\int \sin \frac{1}{2} x \; . \frac{1}{2} dx$

$= -2 \cos \frac{1}{2} x + c$

2. $\int \sin^2 x \cos x \; dx = \int \sin^2 x.(\cos x \; dx)$

$= \int \sin^2 x \; d(\sin x)$

$= \frac{\sin^3 x}{3} + C$

3. $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x \, dx}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

4. $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos(3x) \; .3x dx$

$= \frac{1}{3} \sin(3x) + C$

5. $\int \tan \; 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \tan 2x \; .2dx$

$= \ln|\sec 2x| + C$

6. $\int 3\cos\;(4x)\; dx = 3\left(\frac{1}{4}\sin(4x)\right) + C$

$= \frac{3}{4}\sin(4x) + C$

7. $\int x \cot \; x^2 dx$?

misalkan : $u = x^2 \to du = 2x \, dx \to x dx = 1/2 du$

$\int x \cot \; x^2 dx = \int \frac{1}{2} \cot u \; du = \frac{1}{2} \ln|\sin \; u| + C = \frac{1}{2} \ln|\sin x^2| + C$

8. $\int \sin^5 x \; \cos \; x dx$

Misalkan : u = sin x $\Rightarrow$ du = cos x dx

Sehingga :

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

9. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x}} = 2\int \sin\sqrt{x} \; d\sqrt{x}$

$$= -\cos\sqrt{x} + C$$

Persamaan-persamaan dibawah ini diperlukan untuk menyelesaikan integral-integral Trigonometri :

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
7. $\text{tg } (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
8. $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
9. $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
10. $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
11. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
12. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos \alpha$
13. $2 \sin x \cos y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$
14. $2 \sin x \sin y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$
15. $2 \cos x \cos y = \cos (x - y) + \cos (x + y)$
16. $\sin (x + y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
17. $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

11.2.4. Integral Fungsi Invers Trigonometri

1) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc \;\; \sin\frac{u}{a} + c$

2) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arc \;\; \tan\frac{u}{a} + c$

3) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc \ \sec \frac{u}{a} + c$

4) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

5) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$

6) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + c$

7) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right) + c$

8) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{ arc } \sin\frac{u}{a} + C$

9) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\ (u+\sqrt{u^2+a^2}) + c$

10) $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln\ \left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \text{arc } \sin\frac{x}{2} + C$

2. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\text{arc } \tan\frac{x}{3} + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{\sqrt{5^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\text{arc } \sin\frac{4x}{5} + C$

4. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{6}\text{arc } \tan\frac{2x}{3} + C$

11.3. Rangkuman

Integral adalah bentuk operasi matematika yang menjadi invers (kebalikan) dari sebuah operasi turunan dan limit dari suatu fungsi. Integral sebagai invers atau kebalikan dari turunan yang disebut sebagai Integral Tak Tentu. Integral sebagai limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu yang disebut Integral Tentu.

11.4. Latihan

Selesaikanlah soal-soal berikut ini :

1. $\int (2x^3 - 4x^2 + 5x + 4)dx$
2. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$
3. $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$
4. $\int \sqrt{1-y^4}\, y^3 dy$
5. $\int \frac{3x dx}{x^2 + 2}$
6. $\int (4 - x^2)^2 x^2 dx$
7. $\int x \ \cot x^2 dx$
8. $\int \sec 3x \ \tan 3x \ dx$
9. $\int (\sin x + \cos x) \ dx$
10. $\int \left(e^x - \frac{2}{x} \right) dx$
11. $\int \frac{2x dx}{1 + x^2}$
12. $\int (e^x + 1)^3 e^3 dx$
12. $\int \sin^3 x \ \cos x \ dx$
13. $\int \tan^5 x \ \sec^2 x \ dx$
14. $\int \frac{\sqrt{5x+2}}{4} dx$
15. $\int \sin 2x dx$
16. $\int 6e^{3x} dx$
17. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 1}$
18. $\int \cos \frac{1}{2} x \ dx$
19. $\int \tan^2 x \ dx$
20. $\int a^{4x} dx$
21. $\int e^{4x} dx$
22. $\int x^2 e^{x^3} dx$
23. $\int x^2 \sec^2 x^3 dx$
24. $\int e^{(2x+3)} dx$
25. $\int \sin x \cos^2 x \ dx$
26. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2 + 6x + 13}$
27. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 4}}$
28. $\int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} dx$
29. $\int x \ \cos(x^2 + 1) dx$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 12
INTEGRAL :
INTEGRAL PARSIAL DAN INTEGRAL TERTENTU

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami dan mampu mengaplikasikan rumus-rumus dasar integral
Sub Pokok Bahasan	:	12.1. Integral Parsial 12.2. Integral Tertentu
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia.

		5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

12.1. Integral Parsial (Bagian)

Suatu bentuk integral yang sering timbul, adalah suatu integral yang integrannya merupakan hasil ganda dari suatu fungsi x, dengan differensial dari fungsi x yang lain.

Andaikan U dan V fungsi dari x, maka dicari hasil dari bentuk :

$$\int U.dV$$

Dalam hitung differensial telah diketahui, bahwa :

$$d(U.V) = U\,dV + V\,dU$$

atau $\quad U\,dV = d\,(U.V) - V\,dU$

maka : $\quad \int U\;dV = U.V - \int V\;dU$ ıtegral dengan bentuk ini disebut integral parsial.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Tentukan : $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

   Penyelesaian :

   Misalkan : U = $x^2 \rightarrow$ dU = 2x dx

   dan : dV = e^{x^2} x dx $\rightarrow V = \frac{1}{2}e^{x^2}$

   Maka : $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx$

   $$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

2. Hitung : $\int x \;\; \sin x \;\; dx$

   Penyelesaian :

   Misalkan : U = x $\rightarrow$ dx = du

   dV = sin x dx $\rightarrow$ v = $\int \sin\;x\;dx$ = - cos x

   Maka :

   $$\int x\;\sin x\;\;dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx$$

   $$= -x\cos x + \sin x + C$$

   Atau : $\int x \;\; \sin x \;\; dx = \int x \;\; d[\cos x]dx$

3. Hitung : $\int x \ \ln x \ dx$

Penyelesaian :

Misal : U = ln x $\rightarrow$ dU = 1/x dx

dan dV = x dx $\rightarrow$ $V = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \ \ln x \ dx = \int \ln x d(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

4. Selesaikan : $\int e^{2x} \sin x \ dx$

Penyelesaian :

Bentuk integral di atas ini dapat diselesaikan dengan menggunakan dua cara,

a) Bila misalkan : $U_1 = e^{2x}$ $\rightarrow$ $dU_1 = 2e^{2x}$ dx

dV_1 = sin x dx $\rightarrow$ V_1 = - cos x

Maka :

$$\int e^{2x} \sin x \ dx = -e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cos x dx$$

Kemudian misalkan lagi : $U_2 = e^{2x}$

dV_2 = cos x dx $\rightarrow$ V_2 = sin x

$$\int e^{2x} \sin x \ dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4\int e^{2x} \sin x \ dx$$

Suku ketiga dari bagian kanan, maka terdapat :

$$5\int e^{2x} \sin x \ dx = e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

Jadi : $\int e^{2x} \sin x \ dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$

b) Bila dimisalkan : U_1 = sin x $\rightarrow$ dU = cos x dx

$dV_1 = e^{2x}$ dx $\rightarrow$ V = ½ e^{2x}

Maka :

$$\int e^{2x}\sin x\ dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin x - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\ dx$$

Kemudian misalkan : $U_2 = \cos x \rightarrow dU = -\sin x\, dx$

$dV = e^{2x}\, dx \rightarrow V = \tfrac{1}{2} e^{2x}$

sehingga :

$$\int e^{2x}\sin x\ dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin x - \tfrac{1}{4}e^{2x}\cos x - \tfrac{1}{4}\int e^{2x}\sin x dx$$

Suku ketiga dari bagian kanan, maka terdapat :

$$\tfrac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\ dx = \tfrac{1}{4}e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

Jadi : $\int e^{2x}\sin x\ dx = -e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$

12.2. Integral Tertentu

Jika fungsi f(x) terdefenisi pada interval tertutup [a, b], maka integral tertentu dari f(x) dari a ke b dinyatakan oleh $\int_a^b f(x)\ dx$, diberikan oleh $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\Delta_i x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta_i x$ jika limitnya ada.

Jika notasi untuk integral tertentu $\int_a^b f(x)\ dx$, maka f(x) disebut integran a disebut batas bawah dan b disebut batas atas.

Jika fungsi f(x) kontinu pada interval tutup [a,b], maka f(x) dapat diintegrasikan pada [a,b].

Sifat-sifat Integral Tertentu :

Jika f(x) dan g(x) kontinu pada interval integrasi $a \le x \le b$, maka :

1. $\int_a^b f(x)\ dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$ untuk sembarang konstanta

4. $\int_a^b \left\{ f(x) \pm g(x) \right\} dx = \int_a^b f(x) \ \ dx + \int_a^b g(x) \ \ dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_o)$ untuk paling sedikit satu nilai x_o antara a dan b

6. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, jika : $a < c < b$

7. Jika F (u) = $\int_0^u f(x)dx$, maka $\frac{d}{du}$ F(u) = f(u)

8. $\int_a^b f(x) \ \ dx = F(x) \ \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

9. $\int_a^b f(x) \ \ dx \geq \int_a^b g(x) \ \ dx, \ jika \ \ f(x) \geq g(x) \ \ dalam \ \text{int}erval \ [a,b]$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Selesaikanlah : $\int_1^6 (x-2)^2\,dx$

Penyelesaian :

$$\int_1^6 (x-2)^2\,dx = \int_1^6 (x^2 - 4x + 4)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_1^6$$

$$= \left[\frac{1}{3}(6)^2 - 2(6)^2 + 4(6) \right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 4(1) \right]$$

$$= \left(\frac{216}{3} - 72 + 24 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4 \right) = 21\frac{2}{3}$$

2. Selesaikan : $\int_1^3 x^2 \ dx$

Penyelesaian :

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{3}\left[3^3 - 1^3 \right]$$

$$= \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

3. Selesaikan : $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$

Penyelesaian :

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\text{arc } \tan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}$$

4. Selesaikan : $\int_{\pi/2}^{0} \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} \sin(2x)d(2x)$

Penyelesaian :

$$\int_{\pi/2}^{0} \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0} \sin(2x)d(2x)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_{\pi/2}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos(2.0) - \cos(2.\pi.2)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos(0) - \cos(\pi)\right] = -\frac{1}{2}[1-(-1)] = -1$$

5. Selesaikan : $\int_{2}^{3} e^{-x/2}dx = -2\int_{2}^{3} e^{-x/2}d(-\frac{x}{2})$

Penyelesaian :

$$\int_{2}^{3} e^{-x/2}dx = -2\int_{2}^{3} e^{-x/2}d(-\frac{x}{2})$$

$$= -2[e^{-x/2}]_2^3 = -2(e^{-3/2} - e^{-1})$$

$$= -2(e^{-1} - e^{-3/2})$$

6. Selesaikan : $\int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+5}\ dx$

Penyelesaian :

$$\int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+5}\ dx = \int_{0}^{2} (x^2+5)^{1/2} d(x^2+5).(1/2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3/2}(x^2+5)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(x^2+5)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{3}(2^2+5)^{3/2} - \frac{1}{3}(0^2+5)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}(9^{3/2} - 5^{3/2}) = \frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}) = 9 - \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

7. Selesaikan : $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx$

Penyelesaian :

Misalkan : U = x^3 + 3x $\rightarrow$ dU = $3x^2$ + 3

1/3 dU = x^2 + 1

Maka : $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{dU}{\sqrt{U}} = \frac{1}{3}\int_1^3 U^{-1/2}dU$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x}\Big|_1^3$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3^3+3(3)} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3+3(1)}$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}$$

8. Hitung : $\int_0^2 \left(5+e^{5x}\right)dx$

Penyelesaian :

$$\int_0^2 \left(5+e^{5x}\right)dx = \int_0^2 5dx + \int_0^2 e^{5x}dx$$

$$= \left(5x + \frac{1}{5}e^{5x}\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(10 + \frac{1}{5}e^{10}\right) - \left(0 + \frac{1}{5}e^{0}\right)$$

$$= 9\frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{10}$$

9. Selesaikan : $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$

Penyelesaian :

Misalkan : U = cos x $\rightarrow$ dU = - sin x dx

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\, dx = -\int_0^{\pi/2} U^2 dU$$

$$= -\frac{1}{3}U^3\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

10. Selesaikan : $\int_0^1 \left(x^2 + 2x\right)^2 dx$

Penyelesaian :

$$\int_0^1 \left(x^2 + 2x\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{5}(1)^5 + (1)^4 + \frac{4}{3}(1)^3\right) - (0) = \frac{38}{15}$$

11. Selesaikan : $\int_0^{\pi/2} (2x + \sin x)dx$

Penyelesaian :

$$\int_0^{\pi/2} (2x + \sin x)dx = \int_0^{\pi/2} 2xdx + \int_0^{\pi/2} \sin xdx$$

$$= x^2\Big|_0^{\pi/2} + (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left[(\pi/2)^2 - 0\right] + \left[-\cos(\pi/2) + \cos 0\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 1$$

12.3. Rangkuman

Integral parsial didasarkan pada rumus turunan dari perkalian dua fungsi :

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Integral tentu yaitu suatu integral fungsi yang memiliki batas atas dan batas bawah untuk disubstitusikan pada hasil pengintegralan. Jika integral dari f(x) adalah F(x), maka : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

12.4. Latihan

A. Gunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan soal-soal berikut ini :

1. $\int e^x \sin \ 2x dx$
2. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$
3. $\int arc \ \tan x \ dx$
4. $\int arc \ \sin x \ dx$
5. $\int xe^x dx$
6. $\int x \sin 3x dx$
7. $\int x\sqrt{x+1} \ dx$
8. $\int x \sec^2 x dx$
9. $\int e^x \cos x \ dx$
10. $\int x^2 \cos x \ dx$
11. $\int x^2 \sin x \ dx$
12. $\int e^{\sqrt{x}} dx$
13. $\int x^2 \ln x \ dx$

B. Selesaikan integral tertentu dibawah ini :

1. $\int_0^4 (2x+3)dx$
2. $\int_1^2 (4x^3+7)dx$
3. $\int_1^2 \frac{1}{w^2} dw$
4. $\int_{-4}^{-2} \left(y^2 + \frac{1}{y^3} \right) dy$
5. $\int_1^4 \frac{s^4-8}{s^2} ds$
6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2 \sin t \ dt$
7. $\int_0^1 (x^2+1)^{10} (2x) dx$
8. $\int_0^t (x-2t)^2 dx$
9. $\int_0^{2\pi} 2 \sin x \cos x dx$
10. $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \ dx$
11. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+4} \ dx$
12. $\int_5^{10} \frac{4dx}{5x-3}$
13. $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{e^x+1} dx$
14. $\int_0^2 (5+e^{5x}) dx$

15. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{4x+3}$

16. $\int_{2}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}}$

17. $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

18. $\int_{0}^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x \; dx$

19. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$

20. $\int_{a}^{b} \frac{\ln x dx}{x}$

21. $\int_{0}^{5} \frac{\ln(x+1)dx}{x+1}$

22. $\int_{0}^{1} e^{x^2+4x}(x+2)dx$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 13
METODE INTEGRAL
INTEGRAL DENGAN SUBSITUSI, INTEGRAL DARI FUNGSI RASIONAL

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami dan mampu menyelesaikan persoalan integral dengan metode subsitusi dan mampu mampu menyelesaikan integral Fungsi Rasional
Sub Pokok Bahasan	:	13.1. Metode menyelesaikan soal integral dengan metode subsitusi 13.1.1. Subsitusi Fungsi Aljabar 13.1.2. Subsitusi Dengan Trigonometri 13.2. Integral dari Fungsi Pecah Rasional 13.2.1. Semua Faktor dari Penyebut Linier dan Berlainan 13.2.2. Semua faktor dari penyebut linier, tetapi ada beberapa yang sama (berulang)

		13.2.3. Beberapa Faktor Penyebut adalah Kuadratis dan Tak Berulang Beberapa Faktor Penyebut adalah kuadratis dan berulang
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

13.1. Integral Dengan Menggunakan Subsitusi

Bila integral tak tentu $\int f(x)\ dx$ tidak dapat langsung diintegralkan dengan menggunakan rumus-rumus dasar integrasi, maka dapat diubah bentuk integrannya ke suatu bentuk dengan cara mengganti peubah x.

Peubah x atau fungsi dari peubah x diganti dengan suatu fungsi yang memiliki perubah baru, misalnya mengubah U atau V, sedemikian sehingga dapat diintegralkan dengan cara-cara yang sudah diketahui. Juga, dx harus diganti dalam bentuk suku dari U dan dU atau v dan dV.

Misalkan :

$x = \varphi\ (U) \ \rightarrow\ dx = \varphi'(U)\ dU$

Maka integral tak tentu di atas menjadi :

$$\int f(x)\ dx = \int f\left[\varphi(U)\varphi'(U)dU\right]$$

$$= \int \varphi(U)dU = F(U) + C$$

Oleh karena bentuk integral tak tentu adalah dari fungsi x, maka pada hasil yang terakhir peubah U harus dikembalikan ke fungsi semula dengan peubah x.

13.1.1. Subsitusi Fungsi Aljabar

a) Jika integran memuat pangkat pecahan dari bentuk a + bx

Diambil subsitusi, untuk a + bx suatu U yang memiliki pangkat, sehingga sesuai dengan a + bx.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Selesaikan : $\int \dfrac{x\ dx}{\sqrt{x+5}}$

Penyelesaian :

Misalkan : $U^2 = x + 5 \ \rightarrow\ 2U\ dU = dx$

$x = U^2 - 5$

Maka : $$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x+5}} = 2\int \frac{(U^2-5)U\,dU}{U}$$

$$= 2\int (U^2-5)dU \ = \frac{2}{3}U^3 - 10U + c$$

Sehingga : $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} - 10\sqrt{x+5} + c$

2. Tentukan : $\int \frac{x^2 dx}{(4+3x)^{2/3}}$

Penyelesaian :

Pangkat pecahan dari (4 + 3x) adalah 2/3, maka diambil : $U^3 = (4 + 3x)$

$3U^2\ dU = 3\ dx \rightarrow dx = U^2\ dU$

Dari : $U^3 = (4 + 3x) \rightarrow x = 1/3\ (U^3 - 4)$

Jadi :

$$\int \frac{x^2 dx}{(4+3x)^{2/3}} = \frac{1}{9}\int \frac{(U^3-4)^2.U^2 dU}{U^2}$$

$$= \frac{1}{9}\int (U^3-4)^2 dU$$

$$= \frac{1}{9}\int (U^6 - 8U^3 + 16) dU$$

$$= \frac{1}{63}U^7 - \frac{2}{9}U^4 + \frac{16}{9}U + C$$

Untuk mendapatkan hasil integral yang terakhir, peubah U diganti dengan suku dari x, yaitu : $U = (4 + 3x)^{1/3}$

Maka : $\int \frac{x^2 dx}{(4+3x)^{2/3}} = \frac{1}{63}(4+3x)^{7/3} - \frac{2}{9}(4+3x)^{4/3} + \frac{16}{9}(4+3x)^{1/3} + C$

b) Jika integran memuat pangkat pecahan dari bentuk : $a + bx^n$

Diambil subsitusi, untuk $a + bx^n$ suatu U yang memiliki pangkat sehingga sesuai dengan $a + bx^n$.

Contoh :

1) Selesaikan : $\int x^5\sqrt{3+x^3}\ dx$

Penyelesaian :

Misalkan : $U^2 = x^3 + 3 \rightarrow 2U\ dU = 3x^2\ dx$

Maka : $x^5\ dx = 2/3\ U\ (U^2 - 3) dU \rightarrow x^3 = U^2 - 3$

Sehingga :

$$\int x^5\sqrt{3+x^3}\ dx = \frac{2}{3}\int U^2(U^2-3) dU$$

$$= \frac{2}{3}\int (U^4 - 3U^2)dU$$

$$= \frac{2}{15}U^5 - \frac{1}{3}U^3 + C$$

$$= \frac{1}{15}(2U^5 - 5U^3) + C$$

$$= 1/15U^3(2U^2 - 5) + C$$

$$= \frac{1}{15}(x^3 + 3)^{3/2}\left[2(x^3 + 3) - 5\right] + C$$

$$= \frac{1}{15}(x^3 + 3)^{3/2}\left[2x^3 + 1\right] + C$$

2) Tentukan : $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 8)^{1/2}}$

Penyelesaian :

Misalkan : $U^2 = x^2 + 8 \rightarrow 2U\ dU = 2x\ dx$

$x^2 = U^2 - 8$

Maka : $x^3\ dx = U\ (U^2 - 8)\ dU$

Sehingga : $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 8)^{1/2}} = \int \frac{U(U^2 - 8)dU}{U^4}$

$$= \int \frac{U^3 - 8U}{U^4} dU$$

$$= \int \frac{dU}{U} - \int \frac{8dU}{U^3}$$

$$= \ln U + \frac{4}{U^2} + C$$

Jadi : $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 8)^{1/2}} = \ln\sqrt{x^2 + 8} + \frac{4}{x^2 + 8} + C$

13.1.2. Subsitusi Dengan Trigonometri

Jika integran memiliki bentuk :

a) $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, diambil subsitusi ; $x = \frac{a}{b}\sin U$

b) $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, diambil subsitusi ; $x = \frac{a}{b}\tan U$

c) $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, diambil subsitusi ; $x = \frac{a}{b}\sec U$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

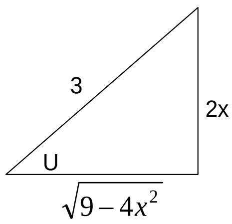
1) Tentukan $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$

Penyelesaian :

Misalkan :

x = 3/2 sin U $\rightarrow$ dx = 3/2 cos U dU

Maka :



$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 U}}{\tfrac{3}{2}\sin U} . \tfrac{3}{2} \text{Cos } U dU$$

$$= 3\int \frac{\cos^2 U dU}{\sin U}$$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2(-U)}{\sin U} dU$$

$$= 3\ln(\operatorname{cosec} U - \operatorname{ctg} U) + 3\cos U + C$$

$$= 3\ln \frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x} + \sqrt{9-4x^2} + C$$

2) Selesaikan : $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$

Penyelesaian :

Misalkan :

x = 2 sec U $\rightarrow$ dx = 2 sec U tg U dU

Maka :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int \frac{4\sec^2 U . 2\sec U \operatorname{tg} U dU}{2 \operatorname{tg} U}$$

$$= 4\int \sec^3 U \, dU$$

$$= 2\sec U \operatorname{tg} U + 2\ln\left|\sec U + \operatorname{tg} U\right| + C$$

$$= \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x = \sqrt{x^2-4}\right| + C$$

13.2. Integral dari Fungsi Pecah Rasional

Suatu polinominal dalam x adalah suatu fungsi dengan bentuk :

$a_o x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n$ dimana a_i (i = 0, 1, 2, ..., n) adalah konstanta dan n bulat positif dan termasuk nol.

Tiap-tiap polinominal dengan koefisien riil dapat dinyatakan sebagai perkalian dari faktor-faktor linier yang riil dalam bentuk ax + b dan atau faktor-faktor kuadratis yang riil dalam bentuk $ax^2 + bx + c$.

Suatu fungsi $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dimana f(x) dan g(x) adalah polinomial, disebut : Fungsi Pecah Rasional.

Jika pangkat f(x) lebih rendah daripada pangkat g(x), F(x) disebut Proper, untuk sebaliknya F(x) disebut Improper.

Bentuk pecahan rasional yang improver dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu polinomial dan suatu pecahan rasional yang proper.

Sebagai contoh :

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x + 1}{x^3 - x^2}$$

Setiap pecahan rasional yang proper dapat dinyatakan sebagai suatu jumlahan dari pecahan-pecahan yang sederhanan yang penyebutnya berbentuk :

$(ax + b)^n$ atau/dan $(ax^2 + bx + c)^n$, dimana n bulat positif.

4 Kemungkinan yang timbul dalam pecahan rasional proper :

a. Semua faktor dari penyebut linier dan berlainan
b. Semua faktor dari penyebut linier, tetapi ada beberapa yang sama (berulang)
c. Beberapa faktor penyebut adalah kuadratis dan tak berulang
d. Beberapa Faktor Penyebut adalah kuadratis dan berulang

13.2.1. Semua Faktor dari Penyebut Linier dan Berlainan

Jika pecahan rasional yang proper F(x), penyebut g(x) dapat dinyatakan sebagai perkalian faktor-faktor linier yang berlainan, misalnya :

$g(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (x - a_n)$

dimana : $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \neq a_n$, maka :

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{A_3}{x - a_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Untuk menghitung A_1, A_2, ... A_n kedua bagian diatas disamakan, atau mengambil harga-harga x tertentu. Jadi disini ada dua metode untuk menghitung koefisien-koefisien tak tentu tersebut.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan : $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}\, dx$

Penyelesaian :

Penyebut : $x^2 - x - 6 = (x+1)(x-3)$

Oleh karena itu, pecahan rasional dapat ditulis :

$$\frac{3x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$= \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Maka dipenuhi bentuk :

3x – 1 = A(x - 3) + B(x + 2)

setara/ekivalen dengan :

3x – 1 = (A + B)x + (-3A + 2B)

Untuk menentukan nilai A dan B :

Bagian kiri identik dengan bagian kanan, berarti koefisien-koefisien dari x yang berpangkat sama dari kedua bagian tersebut harus sama.

Jadi : Koefisien x $\rightarrow$ 3 = A + B

Koefisien x^o $\rightarrow$ -1 = -3A + 2B

Dari dua persamaan tersebut diperoleh A = 7/5 dan B = 8/5. Sehingga

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{3x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{7/5}{x+2} + \frac{8/5}{x-3}$$

dan : $$\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}dx = \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$= \frac{7}{5}\ln |x+2| + \frac{8}{5}\ln |x-3| + C$$

13.2.2. Semua faktor dari penyebut linier, tetapi ada beberapa yang sama (berulang)

Untuk tiap faktor linier ax + b yang timbul n kali dalam penyebut dari pecahan rasional, kita tulis sebagai penjumlahan dari n pecahan parsial dalam bentuk :

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

dimana A_i (i = 1, 2, …………, n) konstanta yang harus dicari.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan : $\int \frac{(3x^2-22x+19)}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$

Penyelesaian :

Perhatikan :

$$\frac{3x^2-22x+19}{(x+2)(x-3)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

$$3x^2-22x+19=A(x-3)^2+B(x+2)(x-3)+C(x+2)$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini didapatkan nilai A = 3, B = 0 dan C = -4.

Maka : $$\int \frac{(3x^2-22x+19)}{(x+2)(X-3)^2}dx=3\int\frac{dx}{x+2}-4\int\frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$=3\ \ln(x+2)+\frac{4}{x-3}+C$$

13.2.3. Beberapa Faktor Penyebut adalah Kuadratis dan Tak Berulang

Untuk tiap-tiap faktor yang memiliki bentuk :

ax^2+bx+c, dinyatakan sebagai pecahan parsial dari bentuk : $\frac{Ax+B}{Ax^2+bx+c}$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan : $\int\frac{dx}{x^3+x}$

Penyelesaian :

Penjabaran disini adalah :

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

Maka : $1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x$

$1 = (A+B)x^2+Cx+A$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut didapatkan nilai A = 1, B = -1 dan C = 0

Jadi : $\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx$

$$= \ln x - 1/2 \ \ln(x^2+1) + C$$

$$= ½ \ \ln \left| \frac{x}{x^2+1} \right| + C$$

13.2.4. Beberapa Faktor Penyebut adalah kuadratis dan berulang

Untuk faktor kuadratis dengan bentuk $ax^2 + bx + c$ yang berulang n kali dalam penyebut pada pecahan rasional yang proper, ditulis sebagai jumlahan dari n pecahan parsial dalam bentuk :

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2bx+c)^2} + ... + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2bx+c)^n}$$

di mana A_1 dan B_1 konstanta yang harus dicari.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan : $\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+2)^2} dx$

Penyelesaian :

Penjabaran disini adalah : $\frac{2x^3+x+3}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)}{(x^2+2)^2}$$

Maka : $2x^3+x+3 = (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)$

$$2x^3+x+3 = Ax^3+Bx^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini, didapatkan :

Koefisien $x^3 \rightarrow 2 = A$

Koefisien $x^2 \rightarrow 0 = B$

Koefisien $x^1 \rightarrow 1 = 2A + C$ dan C = -3

Koefisien $x^0 \rightarrow 3 = 2B + D$ dan D = 2

Jadi bentuk integral : $\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+2}dx - \int \frac{3x-2}{(x^2+2)^2}dx$

$$= \ln(x^2+2) - 3\int \frac{xdx}{(x^2+2)^2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

Diselesaikan dulu integral :

$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$, misalkan $x = \sqrt{2}\ \text{tq}\ q \quad dx = \sqrt{2}\ \sec^2 q\ dq$

$$x^2+2 = 2(tg^2 q+1) = 2\ \sec^2 q$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2 q}{4\sec^4 q}dq = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\int \cos^2 q\ dq$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\int \tfrac{1}{2}(1+\cos\ 2q)\ dq$$

$$= \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\left(q+\frac{1}{2}\sin 2q\right)+c$$

$$\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\ (q+\tfrac{1}{2}\ \sin\ 2q)+C = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\ \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} + C$$

Hasil integral seluruhnya :

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+2)^2}\,dx = \ln\ (x^2+2) + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\ \ \text{arc}\ \ \text{tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x+3}{2(x^2+2)} + C$$

13.3. Rangkuman

- Metode integral dengan subsitusi merupakan salah satu metode untuk mencari suatu integral dengan mensubsitusikan salah satu variabel dan mengubahnya menjadi sebuah bentuk yang lebih sederhana.
- Integral fungsi rasional dapat diselesaikan dengan cara melihat akar-akar dari fungsi g(x). Dengan mengubah fungsi pecah rasional tersebut menjadi **jumlahan fungsi pecah rasional berderajat satu atau dua,** sehingga dapat dihitung nilai integralnya dengan metode substitusi maupun dengan cara yang lain.

13.4. Latihan

Selesaikan dengan integral fungsi rasional untuk soal-soal dibawah ini :

1. $\int \frac{(2x+3)}{(x+2)(x-3)} dx$
2. $\int \frac{(x-1)}{x^3 - x^2 - 2x} dx$
3. $\int \frac{(x^3 - 1)dx}{x^2(x-2)^3}$
4. $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$
5. $\int \frac{(2x-1)}{(x-1)(x-2)} dx$
6. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)} dx$
7. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$
8. $\int \frac{x-8}{x^3 - 4x^2 4x} dx$
9. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 14
PENGGUNAAN INTEGRAL

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami konsep dasar integral dan mampu menentukan luas daerah bidang dengan metode integrasi
Sub Pokok Bahasan	:	14.1. Luas daerah bidang datar dengan integral 14.2. Volume benda putar. 14.3. Volume Benda Putar dengan Penampang Lintang yang Diketahui
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar*

		untuk Perguruan Tinggi", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

14.1. Luas Daerah Bidang dengan Integrasi

Luasan sebagai limit Penjumlahan

Jika f(x) kontinu dan tidak negatif dalam selang a ≤ x ≤ b, integral tertentu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ dan dijelaskan secara geometris. Misalkan selang a ≤ x ≤ b dibagi menjadi n sub interval h_1, h_2,......h_n yang panjangnya $\Delta_1 x,\ \Delta_2 x, \ldots\ldots, \Delta_n x$ (boleh juga untuk mudahnya diambil $\Delta_1 x = \Delta_2 x = \ldots\ldots = \Delta_n x$. Ambil sembarang titik x = x_i pada masing-masing h_i, dan bentuk persegi panjang yang alasnya h_i (jadi panjangnya $\Delta_i x$) dan tingginya f(x_i). Persegi panjang itu disebut persegi panjang pendekatan. Luas persegi panjang = f(x_i) $\Delta_i x$, dan jumlah luas n persegi panjang : $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ yang mana merupakan pendekatan dari luas daerah dibatasi oleh f(x), sumbu X serta garis-garis x = a dan x = b. Kalau $\Delta_k x \to 0$, banyaknya subinterval n → ~ maka luas daerah tersebut adalah : $\text{Luas} = L = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = \int_a^b f(x)dx$

Luasan dengan Integrasi

Langkah-langkah yang perlu untuk membentuk integral tertentu yang menghasilkan luas yang diminta adalah :

(1) Buat suatu gambar, yang menunjukkan a) luas yang dicari, b) wakil pita, dan c) persegi panjang yang didekati. Sebagai suatu kebijaksanaan, akan ditunjukkan wakil sub selang yang lebarnya Δx (atau Δy) dan titik x_k (atau y_k) pada sub selang tersebut.

(2) Tulis luas persegi panjang yang didekati dan jumlahnya untuk n buah persegi panjang

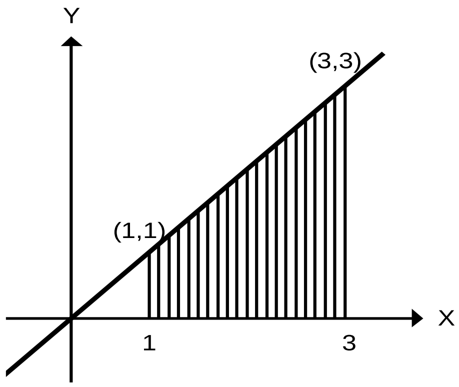
(3) Misalkan jumlah persegi panjang menuju tak terhingga dan gunakan teorema dasar integrasi.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1) Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis y = x , sumbu x, x = 1 dan x = 3.

Penyelesaian :

$$Luas = \int_1^3 x \ dx = 1/2 \ x^2 \Big|_3^1 = 4$$



Gambar 13.1. Daerah bidang yang dibatasi garis y=x , sumbu x, x=1 dan x=3

2) Hitung luas daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = x^2 + 7x - 1$ dan garis lurus $y = 2x - 7$.

Penyelesaian :

Tentukan titik potong kurva sebagai batas integral :

$x^2 + 7x - 1 = 2x - 7$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 3)(x + 2) = 0$

$x = -3$ dan $x = -2$

Luas daerah yang dimaksudkan adalah :

$$\text{Luas} = \int_{-2}^{-3} \left(x^2 + 5x + 6\right) dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right) \Big|_{-2}^{-3}$$

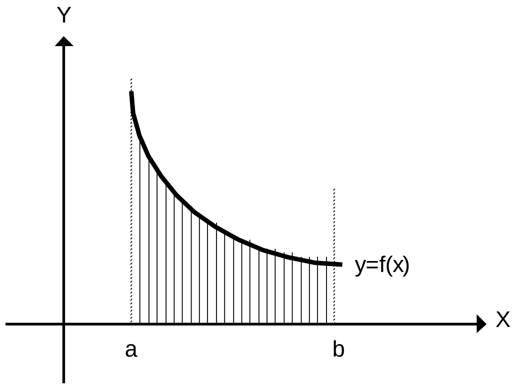
$$= \frac{1}{3}\left[(-3)^3 - (-2)^3\right] + \frac{5}{2}\left[(-3)^2 - (-2)^2 + 6[(-3) - (-2)]\right]$$

$$= -\frac{19}{3} + \frac{25}{2} - 6 = \frac{1}{6}$$

Untuk mudahnya, dapat disimpulkan sebagai berikut :

(A) Kalau f(x) kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan $f(x) \geq 0$ pada interval tersebut, maka luas daerah yang dibatasi oleh f(x), x = a, x = b dan sumbu x adalah :

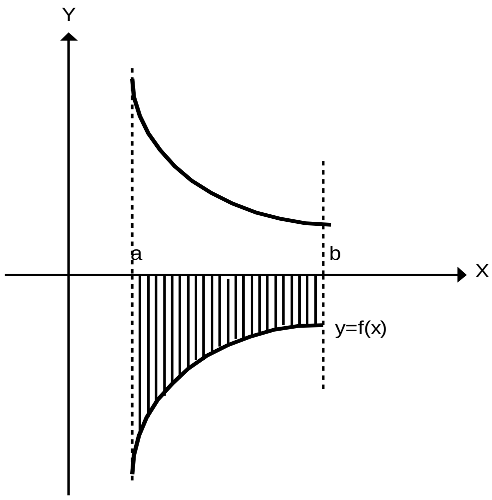
$$\text{Luas} = \int_a^b f(x)dx$$



Gambar 13.2. Daerah bidang yang dibatasi oleh f(x) ≥ 0, x=a, x=b dan sumbu x

(B) Kalau f(x) kontinu pada interval $a \le x \le b$ dan $f(x) \le 0$ pada interval tersebut, maka luas daerah yang dibatasi oleh f(x), x = a, x = b dan sumbu x adalah :

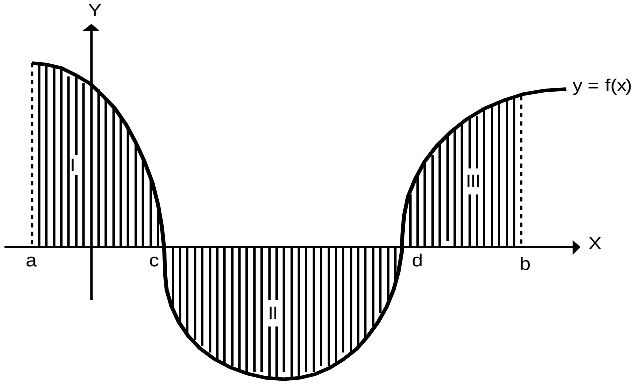
$$\text{Luas} = \int_a^b -f(x)dx$$



Gambar 13.3. Daerah bidang yang dibatasi oleh f(x) ≤ 0

(C) Kalau f(x) kontinu pada interval $a \le x \le b$ dan bertukar tanda, maka luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) \le 0$, x = a dan x = b dan sumbu x sama dengan penjumlahan luas masing-masing daerah.

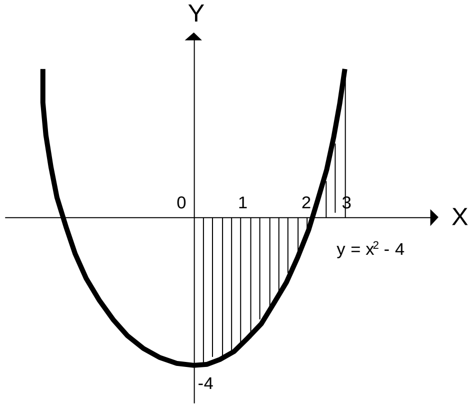
$$\text{Luas} = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d -f(x)dx + \int_d^e f(x)dx$$



Gambar 13.4. Daerah bidang yang dibatasi oleh f(x) kontinu pada interval a≤x≤b

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 - 4$, garis x = 0, x = 3, dan sumbu x.



Penyelesaian :

$$\text{Luas} = \int_0^2 -(x^2 - 4)dx + \int_2^3 (x^2 - 4)dx$$

$$= (-1/3x^3 + 4x)\Big|_0^2 + (1/3x^3 - 4x)\Big|_2^3$$

$$= \frac{23}{3}$$

Catatan :

Luas daerah yang dibatasi grafik x = f(y), garis-garis y = a, y = b, dan sumbu Y adalah: $\text{Luas} = \int_a^b |f(y)|dy$

14.2. Volume Benda Putar

Benda Putar

Benda Putar dibentuk dengan memutar suatu bidang datar sekeliling sebuah garis, disebut sumbu putar pada bidang datar.

Volume benda putar dapat ditemukan melalui salah satu cara dibawah ini.

(i) Metode Cakram

A. Sumbu putar merupakan bagian batas bidang datar.

(1) Buatlah sketsa daerah yang dimaksud, suatu pita wakil tegak lurus sumbu putar, dan persegi panjang yang didekati pita tersebut.

(2) Tulislah volume dari cakram (tabung) yang terbentuk, jika persegi panjang yang didekati itu diputar sekeliling sumbu putar dan hitung jumlah volume n buah persegi panjang yang didekati.

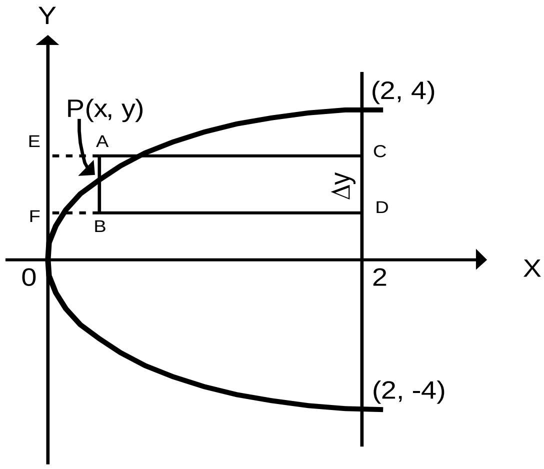
(3) Andaikan banyaknya persegi panjang yang didekati, menuju tak berhingga dan gunakan Teorema dasar.

B. Sumbu putar tidak merupakan bagian batas bidang datar.

(1) Seperti (1) diatas.

(2) Perpanjang sisi persegi panjang ABCD yang didekati, sampai bertemu sumbu putar di E dan F seperti gambar 1. Apabila persegi panjang yang didekati ini diputar sekeliling sumbu putar, suatu cincin penutup terbentuk, volumenya adalah selisih antara hasil putaran persegi panjang EABF dan ECDF sekeliling sumbu putar. Tulislah selisih antara kedua volume itu dan lanjutkan seperti (2) diatas.

(3) Seperti (3) diatas.



Gambar 13.5. Volume benda putar

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Cari volume benda yang terbentuk karena perputaran daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 8x$ dan latus rectumnya (x = 2) sekeliling sumbu-y.

Penyelesaian :

Lihat gambar 13.5.

Bagilah daerah tersebut dengan irisan horisontal. Jika persegi panjang yang didekati gambar 1 diputar sekeliling sumbu-y, yang membentuk sebuah pembersih yang volumenya berbeda dari volume yang dibentuk dengan perputaran ECDF (dimensi 2. Δy) dan persegi panjang EABF (dimensi x . Δy) sekeliling sumbu-y, yaitu $\pi(2)^2\Delta y$ - $\pi(x)^2\Delta y$. Volume yang ditanyakan ialah :

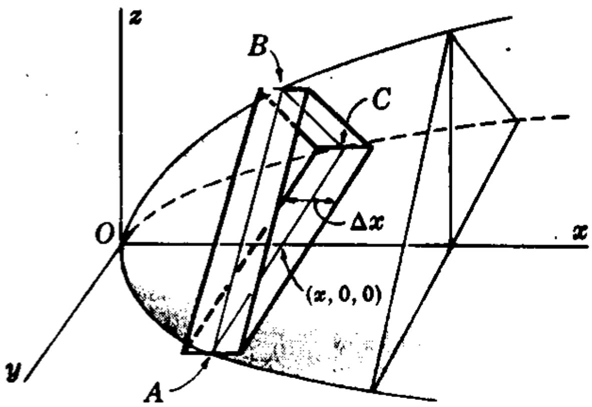
$$V = \int_{-4}^{4} 4\pi \; dy - \int_{-4}^{4} \pi x^2 dy = 2\pi \int_{0}^{4} (4 - x^2) dy$$

$$= 2\pi \int_{0}^{4} (4 - \frac{y^4}{64}) dy = \frac{128}{5}\pi \text{ satuan kubik}$$

14.3. Volume Benda Putar dengan Penampang Lintang yang Diketahui

Volume benda putar yang terbentuk karena perputaran daerah yang dibatasi oleh kurva y=f(x), sumbu-x dan garis x = a dan x = b, sekeliling sumbu-x adalah $\int_a^b \pi y^2 dx$.

Integran $\pi y^2 = \pi\{f(x)\}^2$ dapat ditafsirkan sebagai luas penampang lintang benda, yang terjadi oleh suatu bidang tegak lurus pada sumbu-x dan berjarak x satuan dari titik asal.



Gambar. 13.6 Benda putar dengan penampang lintang yang diketahui

Sebaliknya, jika luas penampang silang ABC, yang terjadi oleh suatu bidang tegak lurus pada sumbu-x dan berjarak x satuan dari titik asal, dapat dinyatakan sebagai fungsi x, A(x), maka volume benda diberikan oleh $V = \int_\alpha^\beta A(x)dx$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Suatu benda mempunyai lingkaran alas yang berjari-jari 4 satuan. Cari volume benda itu, jika setiap bidang irisan tegak lurus pada garis tegah yang tetap, merupakan segitiga samasisi.

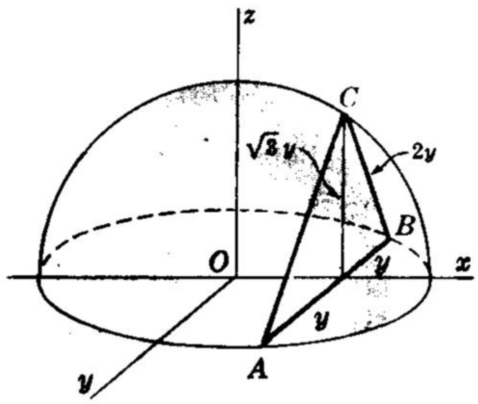
   Penyelesaian :

   Ambil lingkaran seperti gambar dibawah, dengan sumbu-x sebagai garis tegah yang tetap. Persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 = 16$.

   Penampang lintang ABC merupakan segitiga samasisi dengan sisi 2y dan luas A(x)= $\sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(16 - x^2)$.

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx = \sqrt{3}\int_{-4}^{4}(16 - x^2)dx$$

$$= \sqrt{3}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{256}{3}\sqrt{3} \;\; satuan \;\; kubik$$

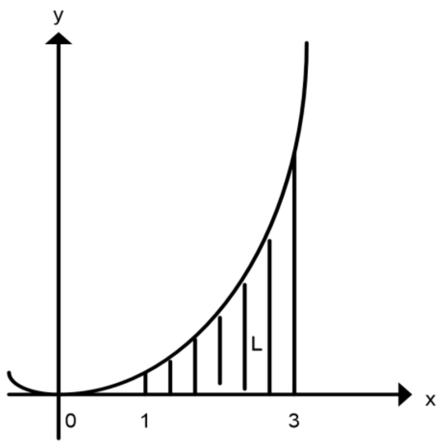


Gambar 13.7. Volume benda yang dibatasi lingkaran dengan alas berjari-jari 4 satuan

Soal-soal yang dipecahkan :

1. Tentukan luas bidang datar yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$, garis x =1 garis x = 3 dan sumbu x.

   Penyelesaian :



$$L = \int_{1}^{3} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3)^3 - (1)^3\right]$$

$$= \frac{26}{3} \;\; satuan \;\; luas$$

2. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola : $y = -2x^2 + 1$ dan garis y = x + 1.

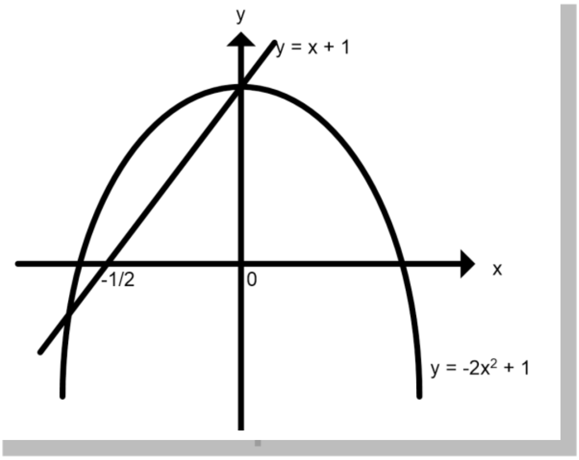
   Penyelesaian :

   Tentukan titik-titik potong kurva, sebagai batas integral :

   $-2x^2 + 1 = x + 1$

   $-2x^2 - x = 0$

   $-x\,(2x + 1) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0$ dan $x_2 = -\frac{1}{2}$



Luas daerah yang dimaksud adalah :

$$L = \int_{-1/2}^{0} [(-2x^2+1)-(x+1)]dx = \int_{-1/2}^{0}(-2x^2 - x)dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1/2}^{0}$$

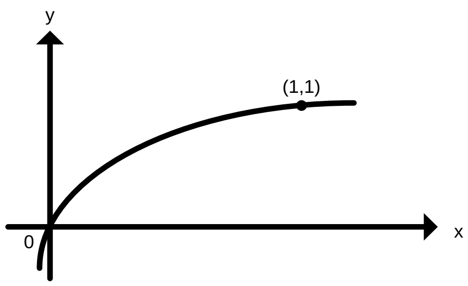
$$= [-\frac{2}{3}(0)^3 - \frac{1}{2}(0)^2] - [-\frac{2}{3}(-1/2)^3 - \frac{1}{2}(-1/2)^2]$$

$$= -[\frac{2}{24} - \frac{1}{8}]$$

$$= -\frac{2}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{2} \text{ satuan luas}$$

3. Cari luas permukaan benda putar yang terbentuk oleh perputaran busur x = y^3 dari y = 0 sampai y = 1disekeliling sumbu-y.

Penyelesaian :

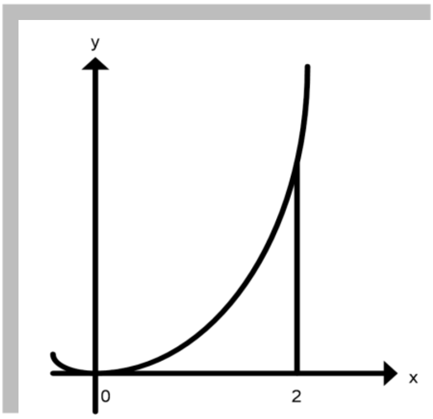


$$S_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^1 y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{27}(1+9y^4)^{3/2} \quad = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1) \ \textit{satuan luas}$$

4. Hitung volume benda putar yang terbentuk oleh lengkung y = x^2, sumbu x dan garis x = 0, garis x = 2. Diputar terhadap sumbu x sebagai sumbu putar.

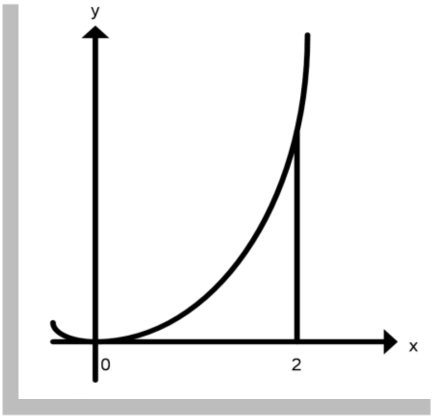
Penyelesaian :



$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2\, dx$$
$$= \pi \int_0^2 (x)^4 dx$$
$$= \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2$$
$$= \frac{\pi}{5}(2^5 - 0) = \frac{32}{5}\pi \text{ satuan volume}$$

5. Hitung volume benda putar yang terbentuk oleh lengkung $y = x^3$, x = 1, x = 3 dan sumbu x sebagai sumbu putar.

Penyelesaian :



$$V = \pi \int_1^3 (x^3)^2 dx$$
$$= \pi \int_1^3 (x)^6 dx$$
$$= \frac{\pi}{7} x^7 \Big|_1^3$$
$$= \frac{\pi}{7}(3^7 - 1) = 312\frac{2}{7}\pi \text{ satuan volume}$$

6. Hitung volume benda putar daerah yang dibatasi oleh parabola y = $-x^2 - 3x + 6$ dan garis x + y – 3 = 0 diputar terhadap garis x = 3 sebagai sumbu putar.

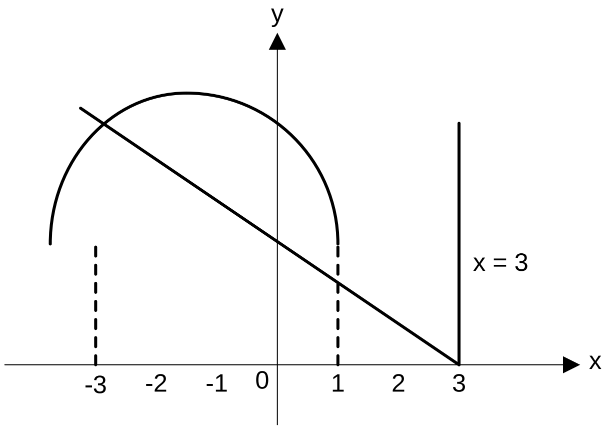
   Penyelesaian :

   - Tentukan titik potong kedua grafik :

     $-x^2 - 3x + 6 = -x + 3$

     $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$

     $x_1 = -3$ dan $x_2 = 1$



- Maka volume benda putar adalah :

$$V = 2\pi \int_{-3}^{1} x \ f(x)dx = 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\{(-x^2-3x+6)-(-x+3)\}dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-2x+3\right)dx$$

$$= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(x^3-x^2-9x+9\right)dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x \right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{256}{3}\pi$$

14.4. Rangkuman

Penerapan integral pada bidang teknik adalah untuk mengetahui volume benda putar dan mengetahui luas daerah pada bidang.

Langkah-langkah dalam menghitung luas daeran dengan integral tertentu adalah :

- Gambar daerah yang dimaksudkan, yang menunjukkan luas yang dicari, wakil pita, dan persegi panjang yang didekati. Sebagai suatu kebijaksanaan, akan ditunjukkan wakil sub selang yang lebarnya Δx (atau Δy) dan titik x_k (atau y_k) pada sub selang tersebut.
- Tulis luas persegi panjang yang didekati dan jumlahnya untuk n buah persegi panjang
- Misalkan jumlah persegi panjang menuju tak terhingga dan gunakan teorema dasar integrasi.

14.5. Latihan

1. Tentukan luas daerah yang dibentuk oleh : $y = x$, $y = 3x$ dan $x + y = 4$.
2. Hitung luas bidang datar yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 + 1$ dan garis $y = 5$.
3. Hitung luas bidang datar yang dibatasi oleh parabola $y = 9 - x^2$ dan $y = x + 3$.
4. Tentukan volume benda putar yang terbentuk oleh daerah yang dibatasi oleh sumbu y, grafik $y = x^3$, $y = 1$ dan $y = 8$, diputar terhadap sumbu y sebagai sumbu putar.
5. Hitung volume benda putar yang terbentuk oleh daerah yang dibatasi $y^2 = 8x$ dan garis $x = 2$, diputar terhadap sumbu y sebagai sumbu putar.
6. Tentukan volume benda putar yang terbentuk oleh daerah yang dibatasi oleh $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$ dan garis $x = 3$, diputar terhadap sumbu-y sebagai sumbu putar.

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 15
INTEGRAL TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK WAJAR

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa memahami dan mampu menyelesaikan Integral tak tentu dan Integral tak wajar
Sub Pokok Bahasan	:	15.1. Bentuk tak tentu jenis 0/0 15.2. Aturan l'Hopital untuk Bentuk 0/0 15.3. Teorena Nilai Rata-rata Cauchy 15.4. Integral Tak Wajar 15.5. Pemakaian Integral tak tentu
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga.

		4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia. 5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

Tidak semua integral fungsi dapat diselesaikan dengan teorema dasar kalkulus, dimana teorema dasar kalkulus untuk integral $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ tidak berlaku untuk integrasi fungsi tersebut. Integral dimana $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ tidak berlaku disebut dengan integral tak wajar.

Integral tak wajar adalah limit dari integral tertentu dengan batas pengintegralan mendekati bilangan riel tertentu ∞, -∞, atau pada beberapa kasus keduanya.

Integral tak wajar digunakan untuk menghitung nilai integral yang tidak ada dalam arti umum, dimana salah satu batas integralnya adalah tak hingga (∞).

15.1. Bentuk Tak Tentu Jenis 0/0

Ada 3 masalah limit yang dikenal, yaitu :

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$,
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Ketiga limit ini memiliki penampilan yang sama, yaitu ada hasil bagi dan dalam ketiga limit itu pembilang dan penyebut berlimit nol, sehingga dengan menggunakan aturan penarikan limit untuk hasil bagi, diperoleh jawaban yang tak ada artinya, yaitu 0/0. Limit tersebut tidak dapat ditentukan dengan aturan hasil bagi limit.

Aturan yang lazim dipakai untuk menghitung limit-limit demikian dinamakan *Aturan l'Hopital*.

15.2. Aturan *l'Hopital* untuk Bentuk 0/0

Andaikan $\lim\limits_{x \to u} f(x) = \lim\limits_{x \to u} g(x) = 0$

Apabila $\lim [f'(x)/g'(x)]$ ada, baik ia terhingga atau tak terhingga (bilangan terhingga L, ∝, atau -∝), maka : $\lim\limits_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Disini u dapat mewakili sebarang simbol a, a^-, a^+, -∝ atau +∝.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

Gunakan aturan *l'Hopital* untuk membuktikan bahwa :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$

Penyelesaian :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{D_x \sin x}{D_x x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{2x-1}$

$= \dfrac{6}{5}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{D_x(1-\cos x)}{D_x x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0$

d. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{2x-4}$

$= \infty$

15.3. Teorena Nilai Rata-rata Cauchy

Andaikan f dan g fungsi yang terdiferensialkan pada selang (a, b) dan kontinu pada selang [a, b]. Apabila g ′(x) ≠ 0 untuk semua x di (a, b), maka ada bilangan c dalam selang (a, b) sehingga $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Bukti aturan *l'Hopital* :

Adanya $\lim\limits_{x\to a^+} [f'(x)/g'(x)]$ mengandung pula sifat adanya f ′(x) dan g ′(x) paling sedikit dalam lingkungan (a, b) dari a dan bahwa kita hanya mengetahui $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. Sehingga dapat didefinisikan bahwa f(a) =0 dan g(a) = 0. Dengan demikian f dan g kontinu (kanan) di a. Ini semua perlu agar f dan g memenuhi syarat-syarat dalam teorema nilai rata-rata Cauchy pada selang [a, b]. Dengan demikian maka ada c dalam (a, b) sehingga $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Oleh karena f(a) = 0 = g(a), maka $\dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Apabila $b \to a^+$ jadi juga $c \to a^+$, maka diperoleh : $\lim\limits_{b \to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim\limits_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Bukti yang serupa berlaku untuk limit kiri.

15.4. Integral Tak Wajar

Integral Tertentu $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tak wajar, jika :

a) integral f(x) mempunyai satu atau lebih titik diskontinu pada selang $a \le x \le b$, atau

b) paling sedikit satu batas integrasinya tak berhingga

Integran yang Diskontinu, jika f(x) pada selang $a \le x < b$, tetapi diskontinu pada x = b, maka didefinisikan $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ asalkan limit ada.

Jika f(x) kontinu pada selang $a < x \le b$, tetapi diskontinu di x = a, didefinisikan

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ asalkan limit ada.

Jika f(x) kontinu untuk semua nilai x pada selang $a \le x \le b$, kecuali x = c, di mana a<c<b, didefinisikan $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ asalkan kedua limit itu ada.

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Hitung : $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Penyelesaian :

Integran diskontinu pada x = 3.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin \frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin\ 1 = \frac{1}{2}\pi$$

Maka : $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\pi$

2. Tentukan kekonvergenan integral : $\int_0^1 5x^{-2}dx$

Penyelesaian :

$$\int_0^1 5x^{-2}dx = 5\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= 5.\lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= 5.\lim_{u\to 0^+}\left(-x^{-1}\right)_0^1$$

$$= 5\left(0^{-1} - 1^{-1}\right) = \infty$$

Limitnya tidak ada, maka integral tak wajar divergen

15.5. Bentuk Tak Wajar yang Lain

Untuk limit sebagai berikut : $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

Bentuk limit ini tergolong bentuk $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ yang memiliki sifat bahwa pembilang dan penyebut menuju tak terhingga. Bentuk tersebut dinamakan bentuk tak-tentu dari jenis ∞/∞. Bentuk *l'Hopital* juga berlaku dalam hal ini. Jadi, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Tentukan $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

Penyelesaian :

Tampak bahwa x dan e^x menuju ∞ apabila $x \to \infty$.

Dengan menggunakan Aturan *l'Hopital* diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{D_x x}{D_x e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

2. Hitung Integral tak wajar dari fungsi kontinu $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pada (-∞, ∞) !

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\tan^{-1} x\right)_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1} x\right)_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(-\tan^{-1} a\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\tan^{-1} b\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\pi$$

$= \pi \quad \Rightarrow$ Konvergen

3. Hitunglah : $\int_{-\infty}^{1} 3e^{2x} dx$

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{1} 3e^{2x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{1} 3e^{2x} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{3}{2} e^{2x}\right]_a^1 \quad = \frac{3}{2} \lim_{a\to-\infty} \left[e^2 - e^{2a}\right]$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{a\to-\infty} e^2 - \frac{3}{2} \lim_{a\to-\infty} e^{2a}$$

$= \frac{3}{2} e^2 - 0 = \frac{3}{2} e^2 \quad \rightarrow$ Integral konvergen ke nilai $\frac{3}{2} e^2$

4. Tentukan Integral tak wajar dari fungsi kontinu $\int_{-\infty}^{-1} \frac{4dx}{\sqrt[3]{x}}$ pada (-∞, -1)

Penyelesaian :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{4dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{4dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= 4. \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{3}{2} x^{2/3}\right)_a^{-1}$$

$= 4. \lim_{a\to-\infty} \frac{3}{2}\left(1 - a^{2/3}\right) = -\infty \quad \rightarrow$ divergen

15.6. Pemakaian Integral Tak Tentu

Bila persamaan y = f(x) suatu kurva diketahui kemiringan m di tiap titik P(x,y) pada kurva tersebut diberikan oleh m = f ′(x). Sebaliknya, bila kemiringan suatu kurva di titik P(x,y) padanya diberikan oleh m = dy/dx = f ′(x), kumpulan kurva y = f(x) + C dapat ditemukan lewat integrasi. Untuk mengambil salah satu kurva tertentu dari kumpulan itu, perlu ditetapkan atau ditentukan suatu nilai C. Ini dapat dilakukan dengan menyatakan bahwa karna melalui suatu titik tertentu.

Suatu persamaan s = f(t), dimana s adalah jarak suatu benda pada t terhadap suatu titik tetap pada lintasannya (garis lurus), dengan lengkap mendefinisikan gerakan benda.

Kecepatan dan percepatan pada saat t diberikan oleh

$$v = \frac{ds}{dt} = f^{'}(t) \quad \text{dan} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f^{''}(t)$$

Contoh soal dan penyelesaiannya :

1. Carilah persamaan kumpulan kurva yang kemiringannya di titik P(x,y) adalah m= $3x^2y$ dan persamaan kumpulan kurva yang melalui titik (0,8).

   Penyelesaian :

   $m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y$ atau $\frac{dy}{y} = 3x^2dx$, maka $\ln y = x^3 + C = x^3 + \ln c$ dan $y = ce^{x^3}$.

   Jika x = 0 dan y = 8,

   8 = ce^0 = c

   Persamaan kurva yang ditanyakan adalah : $y = 8e^{x^3}$

2. Suatu besaran tertentu q bertambah dengan kelajuan yang sebanding dengan besarnya sendiri. Jika q = 25 bila t = 0 dan q = 75 bila t = 2, cari q bila t = 6.

   Penyelesaian :

   Karena $\frac{dq}{dt} = kq$, diperoleh $\frac{dq}{q} = kdt$.

   Maka : ln q = kt + ln c atau $q = ce^{kt}$

   Bila t = 0, q = 25 = ce^0 = c; jadi q = $25e^{kt}$

   Bila t = 2, q = $25e^{2k}$ = 75; maka e^{2k} = 3 = $e^{1.10}$ dan k= 55

   Bila t = 6, q = $25e^{55t}$ = $22e^{3.3}$ = $25(e^{1.1})^3$ = 25(27) = 675

15.7. Rangkuman

Integral tak wajar digunakan untuk menghitung nilai integral yang tidak ada dalam arti umum, dimana paling tidak salah satu batas integralnya adalah tak hingga (∞). Manipulasi aljabar dengan Teorema L'Hopital dilakukan untuk menyelesaikan integral tak tentu bentuk 0/0 sehingga bentuknya bukan 0/0.

15.8. Latihan

1. Tentukan limit dari soal-soal dibawah ini. Periksa dengan seksama apakah syarat *l'Hopital* benar-benar telah terpenuhi sebelum digunakan :

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - 2x}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to (1/2)\pi} \dfrac{\cos x}{x - 1/2\pi}$

   c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 4x - 5}$

   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$

   e) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sqrt{t} - t}{\ln t}$

2. Tentukan limit dari soal-soal dibawah ini. Telitilah dengan seksama sebelum menggunakan Aturan *l'Hopital*.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

   e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x)^{x^2}$

3. Sebuah bola digelindingkan pada lapangan rumput datar dengan kecepatan awal 8 m/s. Karena gesekan, kecepatan berkurang dengan kelajuan 2 m/s.
   Berapa jauhkah bola akan menggelinding ?

4. Hitunglah :

   a) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

   b) $\int_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x}}$

   c) $\int_0^4 \dfrac{dx}{4 - x}$

Institut Teknologi dan bisnis
Widya Gama Lumajang

PERTEMUAN 16
UJIAN AKHIR SEMESTER (UAS)

Capaian Pembelajaran	:	Mahasiswa mampu menjawab dan menyelesaikan permasalahan yang diberikan dalam soal
Sub Pokok Bahasan	:	16.1. Soal Ujian Akhir Semester (UAS)
Daftar Pustaka	:	1. Edwin J. Purcell and Dale Varberg, "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Jilid I, Edisi Kelima, Penerbit Erlangga, 1999. 2. Thomas, "*Calculus with Analityc Geometric*" 3. Frank Ayres, JR.,Ph.D. "*Kalkulus*", Seri Buku Schaum Teori dan Soal-soal, Edisi Kedua, Penerbit Erlangga. 4. Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S, dan Agus S, "*Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*", Penerbit Ghalia Indonesia.

		5. N. Soemartojo, Dra, Prof, "*Kalkulus*", Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, 1993. 6. Robert Wrede, Ph.D, Murray R. spiegel, Ph.D, "*Teori dan soal-soal Kalkulus Lanjutan*", Schaum's Outline, Edisi kedua, Penerbit Erlangga.

16.1. Contoh Soal UAS

1. Sebuah perusahaan yang memproduksi sejumlah barang x, mengeluarkan biaya total dinyatakan dengan persamaan : $x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 120x - 200$. Sedangkan harga jual barang x dinyatakan dengan persamaan : - 10 x + 240.

   Hitunglah :

   a) Agar keuntungan yang diterima perusahaan maksimum, tentukan jumlah barang (x) yang harus terjual dan berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut ?

   b) Jika banyaknya barang yang terjual sebanyak 5 dan 20 buah, apakah perusahaan untung atau rugi dan berapa keuntungan atau kerugian perusahaan tersebut ?

2. Tentukan luas daerah bidang yang dibatasi oleh parabola y = 12 - x^2 dan garis y + x = 0

3. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut ini :

   A) $y = \ln(5x-4)^2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^6}}$ B) $y = 3\ \sin\left(x^4 - 7\right) - \frac{3x}{\sqrt[4]{x^8}}$

3. Selesaikan soal **integral** berikut ini :

   $A.\quad 1)\ \int x^2 \cos^3(x^3)\ \sin(x^3)\ dx$ $\qquad 2).\ \int_{-2}^{2} \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^3+3x}}dx$

   $B.\quad 1)\ \int -2x^2 \sin^3(x^3)\ \cos(x^3)\ dx$ $\qquad 2)\ \int_{3}^{6} \frac{(3x^2+3)}{\sqrt{2x^3+6x}}dx$